Développement polynomiaux et applications en théorie de la ruine

P.O. Goffard[1] - *Pierre-Olivier.goffard.me*

[1] Axa France - Institut de Mathématiques de Marseille I2M
Aix-Marseille Université

Week-end Team Building, Novembre 2014

Sommaire

Une courte introduction à la théorie de la ruine

Une méthode d'approximation et d'estimation de la densité via un développement polynomial

Approximation polynomiale de la probabilité de ruine ultime

Estimation de la probabilité de ruine utime

Extension à la dimension supérieure et application en réassurance

Modèle de ruine classique

Soit $\{R(t); t \geq 0\}$ le processus de réserve financière:

$$R(t) = u + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

où

- u est la réserve initiale,
- p est le montant des primes reçues par unité de temps,
- $N(t)$ est un processus de Poisson simple d'intensité β,
- $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires positives, **i.i.d.**, de fonction de répartition F_U et de moyenne μ.

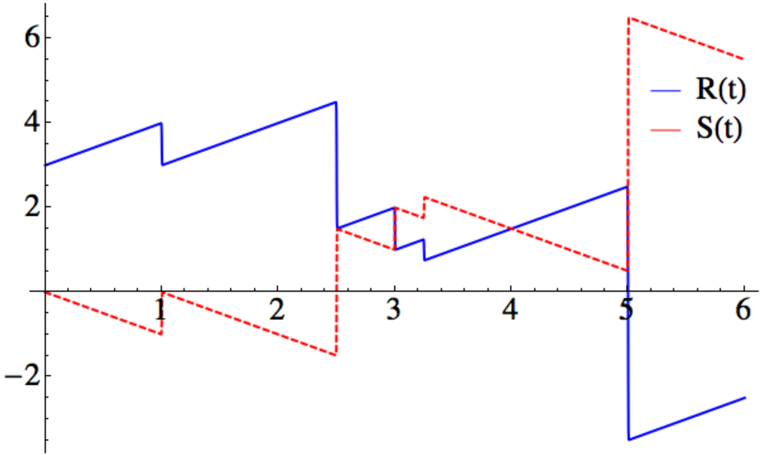
Soit $\{S(t); t \geq 0\}$ le processus de surplus:

$$S(t) = u - R(t).$$

$\eta > 0$ le chargement de sécurité définie par:

$$p = (1 + \eta)\beta\mu.$$

Visualisation graphique du processus de ruine



Probabilité de ruine ultime

La formule de Pollaczek-Khinchine

Dans le cadre du modèle de ruine de Poisson composé, la probabilité de ruine peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1-\rho)\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \overline{F^{*n}_{U^I}}(u), \\ M &\overset{D}{=} \sum_{i=1}^{N} U_i^I, \qquad F_{U^I}(x) = \int_0^x \frac{\overline{F_U(y)}}{\mu} dy, \end{aligned}$$

où N suit une loi géométrique de paramètre $\rho = \frac{\beta\mu}{p} < 1$ et $F^{*n}_{U^I}$ correspond à F_{U^I} convolué n fois avec elle-même.

Deux problèmes à l'étude

Approximation numérique

- Méthode récursive (Algorithme de Panger)
- Inversion de la transformée de Laplace (Fast Fourier Transform, Scaled Laplace transform, Maximum Entropy)

Estimation sur la base d'observation des montants de sinistres et de leur instant d'arrivée

- Bricolage d'estimateur non paramétrique
- Méthodes basées sur les moments

Famille Exponentielle Naturelle Quadratique

Soit dP une mesure de probabilité admettant fonction génératrice des moments au voisinage de 0.

- $\{P_m; m \in \mathcal{M}\}$ definit une FEN générée par dP, telle que

$$dP_m(x) = exp(\phi(m)x - \kappa(\phi(m)))dP(x).$$

La fonction de variance est dite quadratique si:

$$V(m) \quad = \quad am^2 + bm + c$$

Les FENQ sont générées par six distributions:

- Normal
- Gamma
- Hyperbolic
- Binomiale
- Binomiale Négative
- Poisson

Développement polynomial et troncature

Soit $\{Q_n\}$ base othonormale de polynôme par rapport à dP.

$$< Q_n, Q_m >= \int Q_n(x)Q_m(x)dP(x) = \delta_{nm}.$$

Soit X une variable aléatoire de loi $dP_X \in L_2(dP)$ alors

$$\frac{dP_X}{dP}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} < \frac{dP_X}{dP}, Q_n > Q_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(Q_n(X))Q_n(x).$$

Plus simplement

Si f_X est la densité de X et f la densité associée à dP alors

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x) f(x).$$

L'approximation est obtenue par troncature

$$f_X^K(x) = \sum_{k=0}^{K} a_k Q_k(x) f(x).$$

La fonction de répartition par simple intégration

$$F_X^K(x) = \sum_{k=0}^{K} a_k \int_{-\infty}^{x} Q_k(x) f(x) dx.$$

A propos des coefficients du développement polynomial

Q_k est un polynôme d'ordre k et par conséquent

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} q_{j,k} x^j$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} a_k &= E(Q_k(X)) \\ &= \sum_{j=0}^{k} q_{j,k} \left[(-1)^i \frac{d^i}{ds^j} L_X(s) \right]_{s=0} \end{aligned}$$

Placement produit

La formule d'approximation est en fait une formule d'inversion numérique de la transformée de Laplace!

Et si j'ai de la grosse data!

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de taille n alors

$$\widehat{a_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_k(X_i)$$

On plug dans la formule d'approximation

$$\widehat{f_X^K}(x) = \sum_{k=0}^{K} \widehat{a_k} Q_k(x) \widehat{f}(x)$$

Placement produit

Il s'agit d'un estimateur de la densité basé sur l'estimation des moments!

**Le chapeau sur le f, on en parle ou pas?*

Développement polynomial de la probabilité de ruine

La mesure de probabilité associée à $M = \sum_{i=1}^{N} U_i^I$ s'écrit:

$$\begin{aligned} dP_M(x) &= (1-\rho)\delta_0(dx) + (1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n dP_{U^I}^{*n}(x) \\ &= (1-\rho)\delta_0(dx) + dG_M(x). \end{aligned}$$

Si $\frac{dG_M}{dF} \in L^2(P)$ alors:

$$\frac{dG_M}{dP}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} < \frac{dG_M}{dP}, Q_n > Q_n(x).$$

Ce qui donne pour la probabilité de ruine ultime:

$$\psi(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} < \frac{dG_M}{dP}, Q_n > \int_u^{+\infty} Q_n(y)dP(y).$$

Quizz Time!

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0, +\infty[$.
Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0, +\infty[$ est générée par la loi gamma.

$$dP(x) = \frac{e^{-x/m} x^{r-1}}{m^r \Gamma(r)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) d\lambda(x)$$

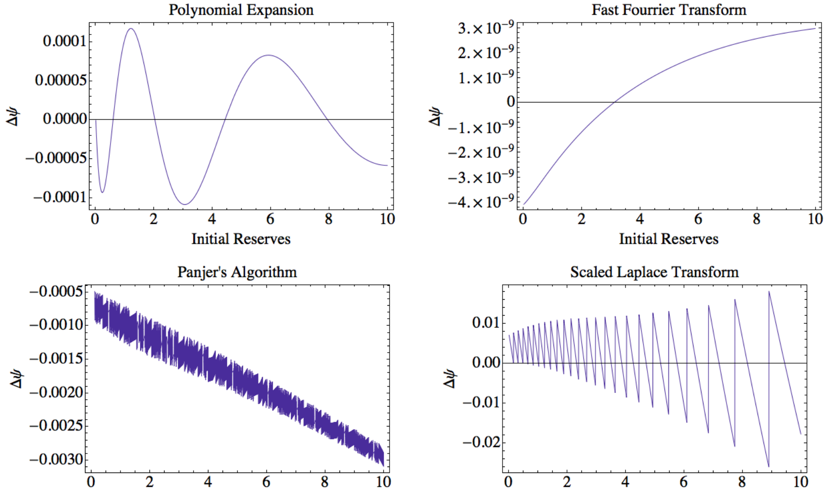
Polynômes orthogonaux $\Rightarrow$ Polynômes de Laguerre généralisés

- Quelle valeur pour $\{m, r\}$ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

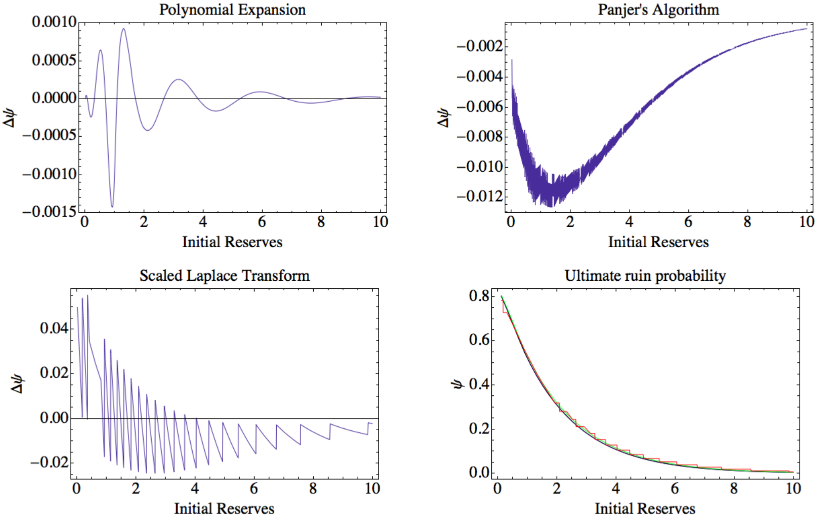
$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow$ $\{1/m < 2\gamma, r > 0\}$ pour que ça marche.
$\hookrightarrow$ $\{1/m = \gamma, r = 1\}$ pour que ça carbure!

Illustrations numériques



Illustrations numériques



Inférence des paramètres du modèle de ruine

Nous disposons d'un historique de sinistres $U_1, ..., U_n$, associés à des temps inter-arrivée $T_1, ..., T_n$.

- On suppose être dans le cadre d'un modèle de Poisson composé.

On estime l'intensité du processus de poisson et la moyenne des sinistres

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j, \qquad \widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_j$$

On décide du chargement de sécurité η et la prime se calcule

$$p = (1+\eta)\widehat{\lambda}\widehat{\mu}$$

Paramétrisation de la méthode

Choix de la distribution de référence

Dans le sillage de l'approximation, il est naturel d'opter pour

$$f(x) = \widehat{\gamma} e^{-\widehat{\gamma} x}$$

en guise de distribution de référence. $\widehat{\gamma}$ est obtenu à l'aide des données.

Estimation des coefficients du développement

On rapelle que $a_n = E(Q_n(M))$. On a besoin des moments de $M = \sum_{i=1}^{N} U_i^I$

- Ils s'expriment en fonction des moments de N et de U^I
  - Les moments de N s'expriment en fonction de $\widehat{\rho} = \frac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}}{p}$
  - Les moments de U^I s'expriment en fonction de ceux de de U

$$E(U^{Ij}) = \frac{E(U^{j+1})}{E(U)}$$

Modèle collectif bivarié avec choc commun

La charge totale de deux portefeuilles de contrats d'assurance non vie sur une période d'exercice s'écrit

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \begin{pmatrix} U_{1j} \\ U_{2j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_1} V_i \\ \sum_{i=1}^{N_2} W_i \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

où

- N, N_1 et N_2 sont des variables aléatoires de comptage indépendantes modélisant le nombre de sinistres.
- (U_{1j}, U_{2j}) vecteurs aléatoires **i.i.d.** corrélés modélisant les montants des sinistres.
- $\{V_i\}$ et $\{W_i\}$ sont des séquences de variables aléatoires positives **i.i.d.** mutuellement indépendantes.

Il s'agit de deux portefeuilles associées à deux compagnies d'assurance distinctes pour la même branche d'activité.

Le traité de réasurance

Non Proportional Reinsurance

Le réassureur propose aux deux cédantes un contrat de réassurance non proportionnelle de priorité b_i et de portée c_i avec $i \in \{1, 2\}$. Le Pay Off s'écrit

$$Min\left\{(S_i - b_i)^+, c_i\right\}$$

- La densité de (S_1, S_2) est nécessaire pour étudier le coût total pour le réassureur

$$Z = Min\left\{(S_1 - b_1)^+, c_1\right\} + Min\left\{(S_2 - b_2)^+, c_2\right\}$$

- On veut $P(Z > z)$!

Développement polynomial bivarié

Same thing

Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité appartenenant aux FENQ avec $\{Q_k^1\}$ et $\{Q_l^2\}$ leur polynômes orthogonaux associés.

$$f_{(S_1,S_2)}(x,y) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} a_{k,l} Q_k^1(x) Q_l^2(y) f_{\nu_1}(x) f_{\nu_2}(y), \tag{2}$$

NB: On passe sous silence quelques considérations

- Lien théorique avec les probabilités de Lancaster
- On peut encore faire des stats

Model settings

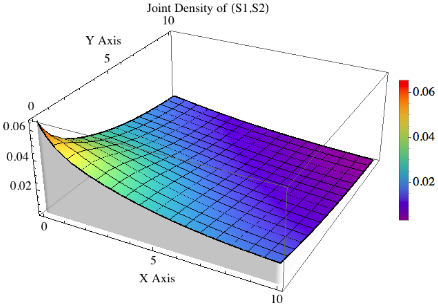
Nombre et montant de sinistres

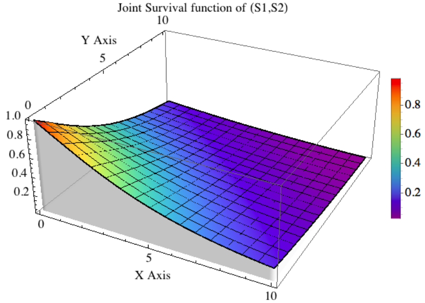
- $N \sim Neg - Bin(a, p)$ et $\{a = 3; p = 1/3\}$
- $(U_{1i}, U_{2i}) \sim GDBVE(\alpha, \rho, \mu_1, \mu_2)$ et $\{\alpha = 1; \rho = 1/4; \mu_1 = 1; \mu_2 = 1\}$
- $N_i \sim Neg - Bin(a_i, p_i)$ et $\{a_1 = a_2 = 1; p_1 = p_2 = 3/4\}$
- $V \sim Exp(\delta_1)$ et W$\sim Exp(\delta_2)$ et $\{\delta_1 = \delta_2 = 1\}$

Priorité et portée de la réassurance

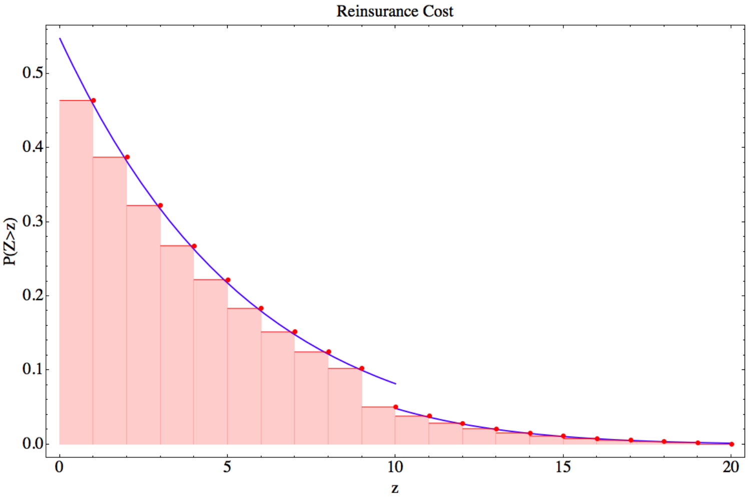
$$\{b_1 = b_2 = 5; c_1 = c_2 = 10\}$$

A vos lunettes 3D





Fonction de survie du coût pour le réassureur



Concluding remarks

Executive Summary

- Une méthode d'approximation et d'estimation de la densité de probabilité assez péchu
- Facile à comprendre et à implémenter
- Limiter en l'application à des distributions à queue légère

C'est quoi les bayes?

- Papier sur l'approximation de la probabilité de ruine (soumis)
- Papier sur l'extension au cas bivarié (soumission la semaine prochaine)
- Papier sur l'estimation de la probabilité de ruine (en cours de rédaction)
- Projet de papier sur l'approximation et l'estimation des distributions composées