# Introduction à la théorie de la ruine

P.O. Goffard[1]

[1] Axa France - Institut de mathématiques de Luminy
Université de Aix-Marseille
*pierre.olivier.goffard@gmail.com*
*pierreolivier.goffard@axa.fr*

Février 2014 /Master IMSA

# Outlines

# Qu'est ce que la théorie de la ruine ?

Modélisation des réserves financières d'une compagnie d'assurance non vie.

- ↪ Stochastique
- ↪ Dynamique
- ↪ Portefeuille de contrat non vie

Objectif : Définir un cadre pour une bonne gestion financière d'un portefeuille de contrat.

- ↪ Un niveau de capital initial
- ↪ Un niveau de prime périodique

L'analyse statistique permet la calibration en quantifiant le risque supporté par le portefeuille.

- Loi des montants de sinistres
  - → Portefeuille dit **homogène**
- Loi pour la fréquence des sinistres

# The essence, the basics

Le résultat d'un assureur non-vie associé à une branche d'activité sur exercice (durée=1 an) s'écrit

$$\begin{aligned} R &= \mathit{Produit\ Technique} + \mathit{Produit\ Financier} \\ &= (P - S) + 2\% \times FP + 3\% \times P - 1.5\% \times S \end{aligned}$$

où,

- R est le résultat de l'exercice
- P est le montant des cotisations payées par les assurés (investi au taux 3%)
- S est la charge totale induite par le règlement des prestations
  - $\hookrightarrow$ Règlement des prestations à la mi-année
- FP est le montant des capitaux propres (investi au taux 2%)
  - $\hookrightarrow$ Compromis entre rentabilité et viabilité du business

# La probabilité de ruine : une mesure de risque désuette

## Le chargement de sécurité

Le chargement de sécurité $\eta > 0$, souvent exprimé en pourcentage, est défini par

$$P = E(S)(1+\eta) \tag{1}$$

↪ De combien le cumul annuel des primes doit excéder la charge moyenne liée aux prestations sur l'année.

## Probabilité de ruine

La probabilité de ruine est la probabilité que le montant $FP$ soit insufisant pour compenser un résultat annuel déficitaire

$$\psi(FP) = P(R < -FP). \tag{2}$$

# Mesures de risque plus actuelles

## Value-at-Risk

La Value-at-Risk est un quantile de la distribution du résultat annuel définie par

$$P(R > -VaR_\alpha(R)) = \alpha \Rightarrow VaR_\alpha = \inf\{x; P(R > -x) = \alpha\}$$

## Tail Value-at-Risk or Expected Shortfall

La Tail Value-at-Risk est égale à la valeur moyenne du résultat sachant qu'il est inférieur à la VaR

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(R) &= E\left(-R|R < -VaR_\alpha(R)\right) \\ &= VaR_\alpha(R) + E\left(-R - Var_\alpha(R)|R < -VaR_\alpha(R)\right) \end{aligned}$$

- $\hookrightarrow$ Solvabilité II $\Rightarrow VaR_{99.5\%}$
- $\hookrightarrow$ Swiss Solvency Test $\Rightarrow TVaR_{99\%}$

# Et l'aléa dans tout ça ?

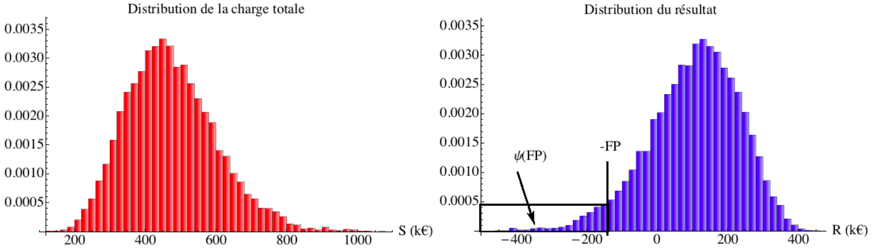



FIGURE : Distribution de la charge totale et du résultat à l'issu de plusieurs exercices

$$\psi(FP) = P\left(S > \frac{P \times 1.03 + FP \times 1.02}{1.015}\right) \tag{3}$$

$\hookrightarrow$ Comment modéliser la charge totale ?

# Modèle Individuelle V.S. Modèle Collectif

## Modèle individuel

Soit un portefeuille de contrat comprenant $n$ polices. La charge totale est définie par :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i U_i$$

- $I_i \overset{i.i.d.}{\sim} B(p)$
- $U_i$ variable aléatoire continue positive i.i.d. indépendante de $I_i$

$\longrightarrow$ Lorsque le nombre de contrats est grand les calculs sont difficiles à effectuer

# Modèle Individuelle V.S. Modèle Collectif

## Modèle Collectif

La charge totale est définie par :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

- $N$ variable aléatoire discrète à valeur entière.
- $U_i$ variable aléatoire continue positive i.i.d. indépendante de $N$

## Théorème : Approximation du modèle individuel par un modèle collectif

- $n$ grand
- Portefeuille homogène

$$S^{Ind} \sim S^{Col}$$

# Processus de réserve et de surplus

On note $\{R_t; t \geq 0\}$ le processus de réserves, et $u = R_0$ la réserve initiale. On fait les hypothèses suivantes :

- $T_i$ v.a. positive i.i.d. égales aux temps inter-arrivée des sinistres
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ instant d'occurence du $n^{ieme}$ sinistre
- $N_t = max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_n \leq t\} = max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_{n+1} \geq t\}$ processus de comptage
- $U_i$ v.a. positive i.i.d. égales aux montants des sinistres indépendants de $N(t)$
- $p$ flow de prime générée par le portefeuille par unité de temps

Ce qui donne :

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

On définit également le processus de surplus $\{S(t); t \geq 0\}$ :

$$S_t = u - R_t$$

# Visualisation graphique

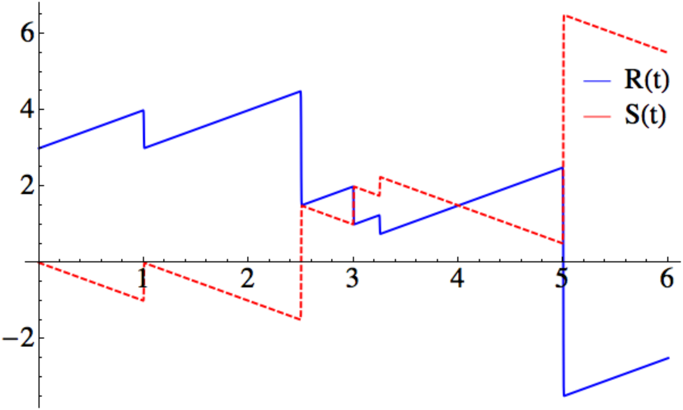



FIGURE : Evolution de la réserve et du surplus au cours du temps

# Définition de la probabilité de ruine

## Probabilité de ruine à horizon de temps infini

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} R_t < 0; R_0 = u\right)$$

## Probabilité de ruine à horizon de temps fini

$$\psi(u, T) = P\left(\inf_{t \in [0,T]} R_t < 0; R_0 = u\right)$$

## Probabilité de non ruine à horizon de temps fini et infini

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \qquad \phi(u, T) = 1 - \phi(u, T)$$

# Définition alternative de la probabilité de ruine

## Instant de ruine et maximum du processus de surplus

$$\tau_u = inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = inf\{t \geq 0 : S_t > u\}$$

$$M = \sup_{t \geq 0} S_t \qquad M_T = \sup_{t \in [0,T]} S_t$$

## Probabilité de ruine à horizon de temps fini et infini

$$\psi(u) = P(\tau_u < \infty) = P(M > u)$$

$$\psi(u,T) = P(\tau_u < T) = P(M_T > u)$$

# Le chargement de sécurité

Soit $\rho$ défini par

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N_t} U_k \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \rho$$

## Chargement de sécurité

Le chargement de sécurité, noté $\eta$, est défini par

$$p = (1+\eta)\rho$$

- Si $\eta < 0$ alor $\psi(u) = 1$
- Si $\eta > 0$ alor $\psi(u) < 1$

# Quelques rappels

Une variable aléatoire $S$ suit une distribution composée $(N, F_U)$ si :

$$S = \sum_{k=1}^{N} U_i$$

- $N$ est une variable de comptage caractérisée par $p_k = P(N = k)$
- $(U_i)_{i \geq 0}$ suite de variables positives i.i.d. indépendantes de $N$ et de fonction de répartition $F_U$

## Fonction de répartition

$$F_S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n F_U^{*n}(x)$$

# Quelques propriétés sur les moments

## Fonction génératrice des moments

$$\widehat{F_S}(s) = E(e^{sS}) = \int_0^{+\infty} e^{sx} dF_S(x) = G_N(\widehat{F_U}(s))$$

- $G_N(s) = E(s^N)$ la fonction génératrice des probabilités de $N$

## Espérance et Variance de $S$

$$E(S) = E(N).E(U)$$

$$Var(S) = E(N).Var(U) + E(U)^2 Var(N)$$

# Distribution du nombre de sinistres

- $N \sim Pois(\lambda)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- $N \sim Bin(n, q)$

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^k$$

- $N \sim NegBin(\alpha, q)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} q^k (1-q)^\alpha$$

# Famille de Panjer

Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs entières caractérisées par $\{p_k\}_{k\geq 0}$ telle que

$$\exists a < 1, \quad b \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

**Caractérisation de la famille de Panjer**

Les seules lois de probabilité vérifiant la relation de récurrence de Panjer sont

- la loi de Poisson,
- la loi Binomiale,
- la loi Binomiale Négative.

# Un méthode d'évaluation itérative

$$S = \sum_{i=1}^{N} U_i,$$

où

- $N$ est une variable de comptage caractérisée par $p_k = P(N = k)$ vérifiant la relation de récurence de Panjer,
- $(U_i)_{i \geq 0}$ suite de variables i.i.d. à valeurs entières indépendantes de $N$ et caractérisées par $q_k = P(U = k)$.

## Algorithme de Panjer

$$P(S = j) = p_j^S = \begin{cases} G_N(q_0), & j = 0 \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^{j} \left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k p_{j-k}^S, & j > 0 \end{cases}$$

# Distribution pour les montants : La loi exponentielle

## Propriétés de la loi exponentielle

$X \sim Exp(\delta)$ alors

$$f_X(x) = \delta e^{-\delta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x), \quad F_X(x) = 1 - \delta e^{-\delta x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\delta}, \quad Var(X) = \frac{1}{\delta^2}$$

## Loi loi de $Erlang(n, \delta)$

Soit $(X_i)_{i>0}$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\delta$, alors

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Erlang(n, \delta),$$

la densité associée est

$$f_{S_n}(x) = \frac{e^{-\delta x} \delta^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x).$$

# Distribution pour les montants : Les lois *Phase-Type*
## Processus de Markov homogène et absorbant

Un processus de Markov homogène et absorbant $\{J_t\}_{t\geq 0}$ est caractérisé par

- Un espace d'état $E \cup \{\Delta\}$
- Une loi initiale $\alpha$ avec $P(J_0 = j) = \alpha_j$
- Une fonction de transition $P_t(i,j) = P(J_t = j | J_0 = i) = e^{\mathbf{A}t}$

**Distribution *Phase-Type***

$U \sim Phase - Type$ alors,

$$F_U(x) = P(\zeta < x),$$

avec $\zeta = Inf\{t \geq 0 : J_t = \Delta\}$.

# Distribution pour les montants : Les lois *Phase-Type*
## Propriétés d'un processus de Markov

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in E \cup \{\Delta\}}$ le générateur du procesus de Markov

### Loi du temps de séjour dans l'état i

$$P_i(T_1 > t) = e^{a_{ii}t}$$

### Loi d'entrée dans le complémentaire de l'état i

$$P_i(J_{T_1} = j) = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

A noter que

$$\sum_{j \in E \cup \{\Delta\}/\{i\}} P(X_{T_1} = j) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in E \cup \{\Delta\}/\{i\}} a_{ij} = -a_{ii}$$

# Distribution pour les montants : Les lois *Phase-Type*
## Formalisme *Phase-Type*

$U \sim Phase - Type(\alpha, \mathbf{T}, E)$ avec

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

où $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{1}_l$, $l$ est le nombre d'état de $E$.

### Quelques propriétés

(i) La fonction de répartition de $U$ est $F_U(x) = 1 - \alpha' e^{\mathbf{T}x}\mathbf{1}_l$,

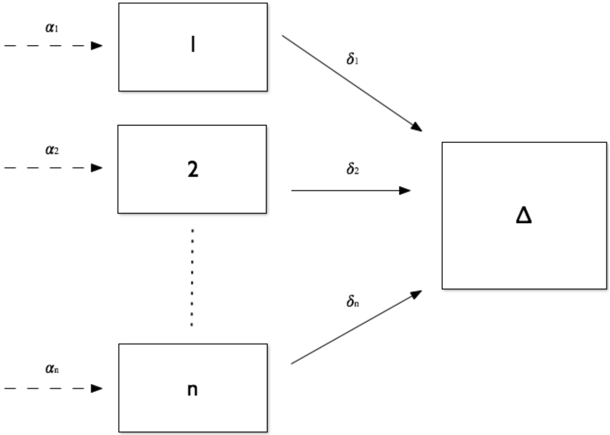
(ii) La densité de $U$ est $f_U(x) = \alpha' e^{\mathbf{T}x}\mathbf{t}$,

(iii) La fonction génératrice des moments est $\widehat{m}_U(s) = \int_0^{+\infty} e^{sx} dF_U(x) = \alpha'(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}$.

# Exemple 1 : Loi HyperExponentielle

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x),$$

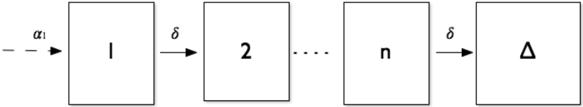
avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Le schéma associé est le suivant



# Exemple 2 : Loi Erlang

$$f(x) = \frac{e^{-\delta x}\delta^n x^{n-1}}{\Gamma(n)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$

Le schéma associé est le suivant



# Une propriété fondamentale

## Un comportement exponentiel asymptotiquement

Soit $U \sim Phase - Type(\alpha, \mathbf{T}, E)$,

- $\eta$ la valeur propre de $\mathbf{T}$ ayant la plus grande partie réelle
- $\nu'$ et $\mathbf{h}$ vecteur propre ligne et colonne associé à $\eta$ tels que $\nu'\mathbf{h} = 1$

On a alors

$$\overline{F_U}(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} Ce^{-\eta x}$$

avec $C = \alpha' \nu' .\mathbf{h1}_l$.

# Géométrique composée

Soit $S = \sum_{i=1}^{N} U_i$ où $N \sim Geom(p)$ avec $p \in (0,1)$,

$$F_S = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)p^k F_U^{*k}$$

**Montant exponentiel**

Si $U_i \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\delta)$, alors

$$\overline{F_S}(x) = pe^{-\delta(1-p)x}$$

# Géométrique composée

Soit $S = \sum_{i=1}^{N} U_i$ où $N \sim Geom(p)$ avec $p \in (0,1)$,

$$F_S = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)p^k F_U^{*k}$$

## Montant exponentiel

Si $U_i \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\delta)$, alors

$$\overline{F_S}(x) = pe^{-\delta(1-p)x}$$

# Approximation de Cramer-Lundberg

## Le coefficient d'ajustement

Le coefficient d'ajustement $\gamma$ est l'unique solution positive de l'équation suivante,

$$\widehat{m}_U(s) = \frac{1}{p}$$

Cette equation est l'équation fondamentale de Cramer-Lundberg.

## Comportement asymptotiquement exponentiel

Soit $S$ une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée, alors

$$\overline{F_S}(x) \underset{x \to \infty}{\sim} Ce^{-\gamma x}$$

# Géométrique composée avec des montants *Phase-Type*

## *Zero-modified Phase-Type*

Soit S une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée. $U_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ *Phase-Type*$(\alpha, \mathbf{T}, E)$ alors S admet une distribution *p-zero modified Phase Type* telle que :

$$S = I.V$$

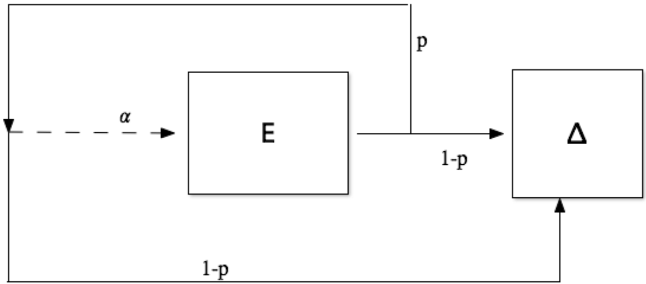
où

- $V \sim Phase - Type(\alpha, \mathbf{T} + p\mathbf{t}\alpha', E)$,
- $I \sim \mathbb{B}(p)$

A noter que

$$\mathbf{t}\alpha' = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_l \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1\alpha_1 & \dots & t_1\alpha_l \\ \dots & \dots & \dots \\ t_l\alpha_1 & \dots & t_l\alpha_l \end{pmatrix}$$

# Géométrique composée avec des montants *Phase-Type*



# Géométrique composée avec des montants *Phase-Type*

## Corollaire

Soit S une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée.
$U_i \overset{i.i.d.}{\sim} Phase\text{-}Type(\alpha, \mathbf{T}, E)$ alors

(i)
$$\overline{F_S}(x) = p\alpha . e^{(\mathbf{T}+p\mathbf{t}\alpha')x} . \mathbf{1}_l$$

(ii)
$$\overline{F_S}(x) \underset{t \to +\infty}{\sim} Ce^{-\eta_+ x},$$

avec $-\eta_+$ la valeur propre de $\mathbf{T} + p\mathbf{t}.\alpha'$ ayant la plus grande partie réelle.

# Définition du modèle

Le processus stochastique régissant l'évolution des réserves financières est supposé être de la forme

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Le processus de surplus associé est de la forme

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - pt.$$

Les hypothèses du modèle de ruine de Cramer-Lundberg sont les suivantes

- $u > 0$ est la réserve initiale de la compagnie d'assurance,
- $p > 0$ le taux de prime reçues continuement dans temps
- $N_t$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\beta$
- $(U_i)_{i>0}$ suite de variables aléatoires, strictement positives, i.i.d. de fonction de répartition $F_U$, de moyenne $\mu$ finie, et indépendantes de $N_t$

# Rappel autour du processus de Poisson

## Définition

Soit $T_i \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\beta)$ et $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$
Le processus de comptage $\{N_t\}_{t\geq 0}$ défini par

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_n < t\}}$$

est un processus de Poisson.

## Caractérisation du processus de Poisson

Si $\{N_t\}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\beta$ alors

(i) $N_0 = 0$ presque surement.

(ii) $N_t \sim Pois(\beta t)$

(ii) $N_t$ est un proccessus à accroissement stationnaires et indépendants

# Probabilité de ruine ultime

La probabilité de ruine ultime est définie par

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 : R_0 = u\right),$$

la probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine ultime est définie par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

**Net Benefit condition**

Dans le cadre du modèle de Cramer-Lundberg $\rho = \beta\mu$, la condition $\eta > 0$ équivaut à

$$p > \beta\mu$$

# Des équations pour la probabilité de non ruine

## Une équation intégro-différentielle

$$\phi'(u) = \frac{\beta}{p}\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(u-y)dF_U(y)\right)$$

## Une équation intégrale

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\beta}{p}\int_0^u \phi(u-y)\overline{F_U}(y)dy$$

Avec $\phi(0) = 1 - \frac{\beta\mu}{p}$.

# La solution des équations

## La formule de Pollaczeck-Khinchine

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\beta\mu}{p}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta\mu}{p}\right)^n \overline{F^{*n}_{U^I}}(u),$$

avec $F_{U^I}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F_U}(y)dy$ l'*integrated tail distribution* de $U$.

Or $\psi(u) = P(M > u)$ où $M = \underset{t \geq 0}{sup}\ S_t$.

$M = \sum_{i=1}^{N} U_i^I$, avec,

- $N \sim Geom\left(\frac{\beta\mu}{p}\right)$
- $U_i^I$ variables aléatoires positives i.i.d. de fonction de répartition $F_{U^I}$

# Approximation de la probabilité de ruine

## L'approximation de Cramer-Lundberg

Sous réserve que la fonction génératrice des moments $\widehat{m}_U(s)$ de $U$ soit définie pour une valeur de $s > 0$ alors

$$\psi(u) \underset{u \to +\infty}{\sim} Ke^{-\gamma u},$$

avec $\gamma$ solution positive de l'équation $\beta + ps = \beta \widehat{m}_U(s)$.

## Avec des montants de distribution *Phase-Type*

Supposons que les $(U_i)_{i \geq 0}$ possède une distribution *Phase-Type* de représentation $(\alpha, \mathbf{T}, E)$ alors la probabilité de ruine vérifie

(i) $\psi(u) = \alpha_+ e^{(\mathbf{T}+\mathbf{t}\alpha'_+)}.\mathbf{1}_l$ avec $\alpha_+ = -\beta\alpha'\mathbf{T}^{-1}$

(ii) $\psi(u) \underset{t \to +\infty}{\sim} Ce^{-\eta_+ x}$,
avec $-\eta_+$ la valeur propre de $\mathbf{T} + \mathbf{t}\alpha'_+$ ayant la plus grande partie réelle.

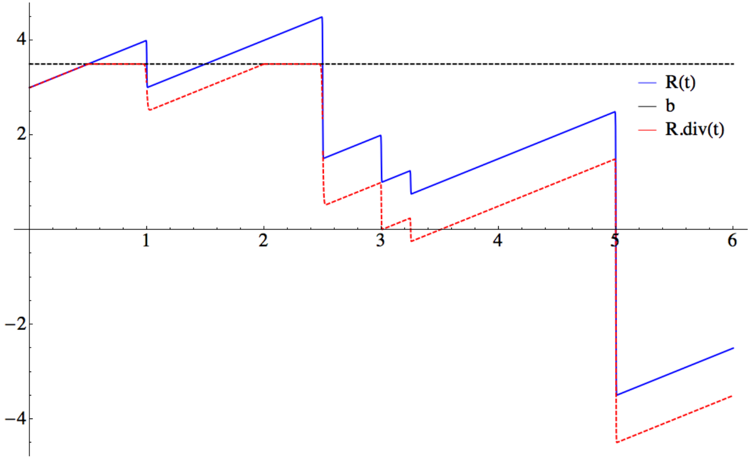
# Le rapprochement de la réalité et de la pratique

- S'affranchir de la vision $0 - 1$
  - $\rightarrow$ Déficit à la ruine
  - $\rightarrow$ Le temps passé dans le rouge
- Dans le cadre de la *Solvency 2* $\Rightarrow$ probabilité de ruine à horizon de temps T=1 an.
- Ajout de taux d'intérêt et de taux d'inflation

$$\begin{cases} dR_t = pe^{\delta t}dt + R_t i dt - e^{\delta t} X_{N_t} dt \\ R_0 = u \end{cases}$$

  - $\rightarrow$ Taux aléatoire voire égaux à des processus stochastiques.
  - $\rightarrow$ Modélisation en univers Markovien. Définition d'une chaine de Markov où chaque état est caractérisé par un environnement économique différent.
- Faire une tarification dépendante du niveau des réserves.
- Modélisation conjointe des réserves associées à deux portefeuilles. Interaction entre les deux portefeuilles et probabilité de ruine multivariée.
- Versement de dividende aux actionnaires. Maximisation de la moyenne des dividendes versées avant la ruine.

# La stratégie du type barrière



# Les variantes et généralisations possibles de modélisation

- Approximation de la charge totale générée par les sinistres via un mouvement Brownien

$$R_t = u + pt - B_t,$$

avec $\{B_t, t \geq 0\}$ et $B_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2 t)$.
- $N_t$ processus de Naissance/Mort ou Poisson non homogène
- Inclure de la dépendance entre les montants de sinistres.
- Inclure une dépendance entre le temps inter-arrivée entre les sinistres et les montant de sinistres.
  - $\rightarrow$ Séisme V.S. Inondations

Les deux ouvrages de référence [?],[?].

# References