Intégration L3 Actuariat

Chapitre I: Introduction

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 26, 2018

Objectif

Assigner à chaque partie d'un ensemble Ω un nombre réel positif afin de généraliser les notions de

- Longueur d'une courbe
- Aire d'une surface
- Volume d'un solide

Definition 1 (Espace d'état, evènements, probabilités, variables aléatoires)

1. L'espace d'état Ω désigne l'ensemble des résultats possible d'un expérience aléatoire. On note $\omega \in \Omega$ le résultat d'une telle expérience.
2. Un évènement $A \subset \Omega$ est une partie de Ω.
3. La probabilité d'occurence d'un évènement A est donnée par $P(A) \in [0,1]$.
4. Une variable aléatoire réelle X est une fonction $\omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$

Example 1 (Discret/Continu)

1. Lancer d'un dé à 6 faces,
   - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
   - $\text{Card}(\Omega) = 6$
   - $w = 6$ est un évènement élémentaire
   - $A =$ 'Le dé prend une valeur paire' $= \{2,4,6\}$
   - $\text{Card}(A) = 3$
   - La probabilité de A est donnée par $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$
   - Variable aléatoire $X(\omega) = \omega$
2. Lancer d'une balle de ping-pong sur une table,
   - $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
   - $\mu(\Omega) = l * L$
   - $w = x, y$ est un évènement élémentaire
   - $A =$ 'La balle tombe dans un gobelet placé au bout de la table'
   - $\mu(A) =$ "Aire couverte par les gobelets"
   - La probabilité de A est donnée par $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Il s'agit d'un cas particulier dans lequel la balle atteint n'importe quel point de la table avec la même probabilité.
   - Variable aléatoire de Bernouill

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} X(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \\ X(\omega) = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

   L'application $\mathbb{1}_A(.)$ est appelée fonction indicatrice.

Example 2 (Exemples actuariel)

Sur une période d'exercice,

- Un assuré subit un sinistre ou non
- 15 accidents de voitures sont décomptés
- Le montant de l'indemnisation d'un sinistre est de 15,000$

On définit des variables aléatoires

- Soit N le nombre de sinistres, associé à une loi de probabilité

$$\mathbb{P}(N = k), k \in \mathbb{N}$$

- Soit $U_1, \ldots, U_N$, les montants associés à chaque sinistre, associé à une li de probabilité

$$\mathbb{P}(U \in [a, b]), a, b \in \mathbb{R}_+.$$

- Le montant agrégé des sinistres sur la période est donnée par $S = \sum_{k=1}^{N} U_k$

L'actuaire a deux missions

- La tarification souvent basé sur la valeur moyenne, aussi appelée espérance mathématique, $\mathbb{E}(X)$.
- Le provisionnement, plutôt axée sur la fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Mes notes se basent sur les ouvrages suivants [1, 3, 2, 4]

Philippe Barbe and Michel Ledoux.
Probabilité.
L'Editeur: EDP Sciences, 2007.

Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin.
Mesure, intégration, probabilités.
Ellipses, `https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/637007/filename/mes-int-pro.pdf`, 2013.

Jacques Gapaillard.
Intégration pour la licence: cours avec exercices corrigés.
Masson, 1997.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.