Intégration L3 Actuariat

Chapitre III: Fonctions mesurables

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
October 18, 2018

Un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ étant donné, la théorie de l'intégration a pour objet de déterminer la "mesure" de fonctions numériques définies sur Ω. Mais de même que μ ne peut mesuré que certaine partie de Ω (celle de $\mathscr{A}$), seules une certaines catégorie de fonctions sont compatible car elle conserve la structure de l'espace de départ. La notion est souvent comparée à la notion de continuité des fonctions définie sur les espaces topologiques. Le terme mesurable prend tout son sens lorsque l'on parle de variables aléatoires.

I. Rappels

1. Image directe et image réciproque de fonctions

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : \Omega \mapsto E$ une fonction.

Definition 1 (Image directe et image réciproque)

Soit une fonction $f : \Omega \mapsto E$, on appelle

1. image directe par f d'une partie $A \subset \Omega$ l'ensemble

$$f(A) = \{f(a)\ ,\ a \in A_1\} \subset E.$$

2. image réciproque par f d'une partie $B \subset E$ l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{a\ ;\ a \in \Omega,\ f(a) \in B\} \subset \Omega.$$

Remarque 1

Le fait de considérer f^{-1} ne suppose pas que f soit bijective. On a toujours $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(E) = \Omega$.

- On a $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(\Omega) = E$ si f est surjective.
- Si f est bijective alors $\forall b \in E$, il existe un unique $a \in \Omega$ tel que $f^{-1}(b) = a$.

A la différence de la fonction image directe, la fonction image réciproque f^{-1} respecte parfaitement les opérations ensemblistes telles que la réunion, l'intersection et le passage au complémentaire.

Proposition 1 (Propriétés de f^{-1})

Soit une fonction $f : \Omega \mapsto E$.

1. *Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensemble de E, on a*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ et } f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

   où I est un ensemble quelconque d'indice.

2. *Pour tout $B \subset E$, $f^{-1}(E/B) = \Omega / f^{-1}(B)$*

Proposition 2 ($(g\circ f)^{-1}$)

Considérons trois ensembles non vides E_1, E_2 et E_3, et deux fonctions $f : E_1 \mapsto E_2$ et $g : E_2 \mapsto E_3$. Alors pour tout $A_3 \subset E_3$, on a

$$(g\circ f)^{-1}(A_3) = f^{-1}\left[g^{-1}(A_3)\right].$$

2. limites sup et limites inf

Toute suite croissante (resp. décroissante) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$, est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \ ; \ n\geq 1\}\left(\text{ resp. } \lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \ ; \ n\geq 1\}\right)$$

Definition 2 ($\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$)

On appelle limite supérieure (resp. limite inférieur) d'une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ l'élement de $\overline{\mathbb{R}}$, noté et défini par

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{n\geq k} x_n\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(\sup_{n\geq k} x_n\right) \ \left(\text{ resp. } \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{n\geq k} x_n\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(\inf_{n\geq k} x_n\right)\right)$$

A la différence de la limite d'une suite, les limites sup et inf existent toujours. Ces notions sont symétriques au sens où

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\overline{\lim_{n\to+\infty}}(-x_n).$$

Des exemples de suites qui ne converge pas au sens habituelle incluent

- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\left(\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

pour lesquels

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = 1 \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = -1$$

Proposition 3 (Lien avec la limite classique, monotonie des limites inf et sup)

1. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors*

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n \quad &\leq \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n \\
\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = a \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = a \\
\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = +\infty \\
\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = -\infty
\end{aligned}$$

2. *Les limites inf et sup sont monotones au sens où, pour deux suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $x_n \leq y_n, \forall n \geq n_0$,

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ y_n \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ y_n$$

Remarque 2

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}$$

Proposition 4

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\overline{\mathbb{R}}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n &\leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) & (1)\\
&\leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n \\
&\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) \\
&\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n & (2)
\end{aligned}$$

Chacune des inégalités (1) *et* (2) *devient une égalité si l'une des suites converge.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $f_n : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, on peut associer la fonction $\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n$ (resp $\underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n$) prenant pour tout $x \in E$ les valeurs $\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x)$ (resp $\underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x)$), appelée limite supérieure (resp. limite inférieure) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propositions 3 et 4 s'applique directement aux suites de fonctions.

II. Fonction mesurables

1. Définitions

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ et $(E, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, et $f : \Omega \mapsto E$ une application.

Definition 3 (Fonction mesurable)

$$\text{f est mesurable si } f^{-1}(B) \subset \mathscr{A} \text{ pour tout } B \in \mathscr{B} \text{ (soit } f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}).$$

Si $(E, \mathscr{B})$ est un espace topologique alors f est une fonction borélienne.

Exemple 1

Toute fonction constante est mesurable. En effet, supposons que $f(\omega) = b$, pour tout $\omega \in \Omega$.Pour toute partie $B \subset \mathscr{B}$, on a

- $b \in B$ alors $f^{-1}(B) = \Omega \subset \mathscr{A}$
- $b \notin B$ alors $f^{-1}(B) = \emptyset \subset \mathscr{A}$

La définition 3 exige de vérifier que $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ pour tout $B \subset \mathscr{B}$. Il est possible de se contenter de faire la vérification sur un sous-ensemble convenable de partie $\mathscr{B}$.

Theoreme 1

1. *$f^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur Ω*
2. *Pour tout $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(E)$: $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$*

preuve:

1. On exploite les propriétés ensemblistes de f^{-1},
   (i) $f^{-1}(E)=\Omega$ donc $\Omega\in f^{-1}(\mathscr{B})$
   (ii) Soit $A\in f^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$. Il existe $B\in\mathscr{B}$ tel que $A=f^{-1}(B)$. On a $f^{-1}(B^c)=f^{-1}(B)^c\in\mathscr{A}$ donc $f^{-1}(B)^c\in f^{-1}(\mathscr{B})$
   (iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in f^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$. Il existe $B_n\in\mathscr{B}$ tel que $A_n=f^{-1}(B_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(B_n)=f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)\in f^{-1}(\mathscr{B})$.
2. Soit $\mathscr{A}$ une tribu telle que $f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{A}$. Si l'on pose

$$\mathscr{B}=\{B;B\subset E,f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\}$$

alors on observe que $\mathscr{E}\subset\mathscr{B}$ et que $\mathscr{B}$ est une tribu. En effet
   (i) $E\in\mathscr{B}$ puisque $f^{-1}(E)=\Omega\in\mathscr{A}$
   (ii) Soit $B\in\mathscr{B}$, on a $f^{-1}(B^c)=f^{-1}(B)^c\in\mathscr{A}$
   (iii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(B_n)\in\mathscr{A}$

On observe ainsi que $\mathscr{B}$ est une tribu sur E contenant $\mathscr{E}$ et par consequent $\sigma(\mathscr{E})$. On a par conséquent $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))\in\mathscr{A}$, qui est une tribu de Ω d'après 1. Il s'agit de la plus petite tribu de Ω contenant $f^{-1}(\mathscr{E})$, on en déduit que
$f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))=\sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$.

$\square$

Corollaire 1 (Caractérisation de la mesurabilité)

Soit $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$ *vérifiant* $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}$

$$f \text{ est mesurable } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}.$$

preuve:

$\Rightarrow$ Supposons que f soit mesurable, alors $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ découle de la définition de la mesurabilité.

$\Leftarrow$ Supposons que $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ alors on a

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \subset \mathscr{A}$$

car $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ et $\sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$ est la plus petite tribu de Ω contenant $f^{-1}(\mathscr{E})$. Cela implique que f est mesurable.

$\square$

Corollaire 2 (Continuité et mesurabilité)

Soient que $(E_1,\mathscr{O}_1)$ et $(E_2,\mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques et $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ leur tribu borélienne associée, et $f : E_1 \mapsto E_2$ une application. On a

$$f \text{ est continue } \Rightarrow f \text{ est mesurable }.$$

preuve:

On note simplement que $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{B}_2$ et $\sigma(\mathscr{O}_2) \subset \mathscr{B}_2$ puis

$$f^{-1}(\mathscr{O}_2) \subset \mathscr{O}_1 \subset \mathscr{B}_1$$

f est mesurable d'après le corollaire 1.

Proposition 5 (Composée et vecteur de fonctions mesurables)

1. *La composée de deux fonctions mesurables est mesurables.*
2. *Si f et g sont deux fonctions mesurables de $(\Omega,\mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathbb{B}(\mathbb{R}))$ alors $h:\omega\in\Omega\mapsto(f(\omega),g(\omega))$ est une fonction mesurable de $(\Omega,\mathscr{A})$ dans $\left(\mathbb{R}^2,\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$*

preuve:

1. Soit $(\Omega_i,\mathscr{A}_i), i=1,2,3$ des espaces mesurables et $f:\Omega_1\mapsto\Omega_2$ et $g:\Omega_2\mapsto\Omega_3$. Pour tout $A_3\in\mathscr{A}_3$, on a
$$(g\circ f)^{-1}(A_3)=f^{-1}(g^{-1}(A_3))$$
avec $g^{-1}(A_3)\in\mathscr{A}_2$ puis $f^{-1}(g^{-1}(A_3))\in\mathscr{A}_1$, ce qui permet de conclure que $(g\circ f)$ est mesurable.
2. Soit $A\times B$ un rectangle dans $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, on a
$$h^{-1}(A\times B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$$
Comme $\sigma(A\times B)=\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ alors h est mesurable par application du corollaire 1.

□

soit $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

Proposition 6 (Stabilité des fonctions mesurables)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- $(\alpha f)(\omega) = \alpha f(\omega)$ *est mesurable*
- $(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ *est mesurable*
- $(f \times g)(\omega) = f(\omega) g(\omega)$ *est mesurable*
- $(f \vee g)(\omega) = \max(f(\omega), g(\omega))$ *est mesurable (valable pour le minimum également)*

preuve:

- La fonction constante égale à α est mesurable, donc la fonction $h : \omega \mapsto (\alpha, f(\omega))$ est mesurable d'après la proposition 5. αf est meusable en tant que composée de la fonction h et de la fonction continue $(x, y) \mapsto xy$.
- La fonction $h : \omega \mapsto (f(\omega), g(\omega))$ est mesurable d'après la proposition 5. $f + g$ (resp. fg resp. $f \vee g$) est mesurable comme composée de h et de la fonction continue $(x, y) \mapsto x + y$ (resp. $(x, y) \mapsto xy$ resp. $(x, y) \mapsto x \vee y$).

□

Probleme 1

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, montrer que* $|f|$ *est mesurable.*

Proposition 7

1. $$f \text{ est mesurable } \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ \{f < a\} \in \mathscr{A}$$

   Valide aussi avec $\{f \leq a\}$, $\{f > a\}$, *et* $\{f \geq a\}$.

2. $$f, g \text{ mesurables } \Rightarrow \{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathscr{A}$$

3. *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonction mesurable, alors*

   $$\sup_{n \geq 1} f_n,\ \inf_{n \geq 1} f_n,\ \overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n,\ \text{et } \underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n \text{ sont mesurables}$$

preuve:

1. On remarque simplement que $\{f < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$

2. Soit $\omega \in \{f < g\}$ alors

$$\begin{aligned} f(\omega) < g(\omega) &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ f(\omega) < r < g(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}\ \omega \in \{f < r\} \cap \{g > r\} \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{g > r\} \end{aligned}$$

On en déduit que $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{g > r\} \in \mathbb{A}$. Les autres propriétés se déduisent des observations suivantes

$$\{f \leq g\} = \Omega / \{f > g\},\ \{f = g\} = \{f \geq g\} \cap \{f \leq g\} \text{ et } \{f \neq g\} = \Omega / \{f = g\}$$

3. La mesurabilité de $\sup\limits_{n \geq 1} f_n$ résulte de

$$\{\sup_{n \geq 1} f_n \leq a\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq a\}$$

La mesurabilité de $\inf\limits_{n \geq 1} f_n$ résulte de $\inf\limits_{n \geq 1} f_n = \sup\limits_{n \geq 1} - f_n$. La mesurabilité de $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} f_n$, et $\underline{\lim\limits_{n \to 1}} f_n$ résulte de la définition de $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}}$ et $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}}$

□

Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions mesurables de Ω vers $\mathbb{R}$.

Corollaire 3 (Suite (f_n) convergente)

Si $(f_n)_{n \in N}$ converge simplement vers $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ alors f est mesurable

preuve:
On remarque que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n$$

$\square$

Definition 4 (Mesure image)

Soit f une application mesurable d'un espace mesuré $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ dans un espace mesurable $(E,\mathscr{B})$. L'application $\mu^f : \mathbb{B} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu^f(A) = \mu[f^{-1}(A)]$ définit une mesure sur $(E,\mathscr{B})$ appelé mesure image de μ par f.

Mes notes se basent sur les ouvrages suivants [1, 3, 2, 4]

Philippe Barbe and Michel Ledoux.
Probabilité.
L'Editeur: EDP Sciences, 2007.

Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin.
Mesure, intégration, probabilités.
Ellipses, https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/637007/filename/mes-int-pro.pdf, 2013.

Jacques Gapaillard.
Intégration pour la licence: cours avec exercices corrigés.
Masson, 1997.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.