Intégration L3 Actuariat

Chapitre III: Complément d'Intégration

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 9, 2020

Nous allons étudier dans ce chapitre diverses propriétés qui permettent d'effectuer des calculs en théorie de l'intégration. Toutes ces notions admettent des applications en calcul des probabilité.

I. Mesures définie par des densités

Proposition 1 (Mesure à densité)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ une application mesurable positive. L'application $\nu : \mathscr{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \ A \in \mathscr{A},$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{A})$ appelé mesure de densité f par rapport à μ

preuve:

1. $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \mathrm{d}\mu$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite d'éléments disjoints de $\mathscr{A}$. On note que

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} f \mathrm{d}\mu \\
&= \int \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} f \mathrm{d}\mu \\
&= \int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{A_n} f \mathrm{d}\mu \\
&= \int \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \int \mathbb{1}_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \nu(A_k).
\end{aligned}$$

Remarque 1

- Si f est intégrable alors ν est finie, en effet:

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega f \mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega |f| \mathrm{d}\nu < \infty$$

- Si f est telle que $\int_\Omega f \mathrm{d}\nu = 1$ alors ν est une mesure de probabilité de densité f.

De nombreuses mesure de probabilité $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ sont à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et sont associées à la loi d'une variable aléatoire X avec

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) \mathrm{d}\lambda(x)$$

Une densité de probabilité $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ est essentiellement une fonction positive, continue par morceaux d'intégrale 1!

Remarque 2

Une variable aléatoire X dont la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue est dite continue. On remarque que

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \int_{\{x\}} f_X(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 0$$

Cependant

$$\mathbb{P}_X([x, x + \mathrm{d}x]) = \mathbb{P}(X \in [x, x + \mathrm{d}x]) = \int_{[x, x+\mathrm{d}x]} f_X(x) \mathrm{d}\lambda(x) \approx f(x) \mathrm{d}x$$

Exemple 1 (Lois de probabilités classiques)

1. $X \sim \text{unif}([a,b])$
$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x),\ a<b.$$
2. $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)\right],$$
3. $X \sim \text{gamma}(\alpha,\beta)$
$$f(x) = \frac{e^{-x/\beta}x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(x),\ \alpha,\beta>0,$$
où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ désigne la fonction gamma.

Theoreme 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, ν une mesure de densité f par rapport à μ, et g une application mesurable définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Alors g est ν intégrable si et seulement si $f.g$ est μ-intégrable, et

$$\int g d\nu = \int g.f d\mu.$$

preuve:
Supposons que g soit étagée positive avec

$$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

On a

$$\int g \mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int \mathbb{1}_{A_i}.f \mathrm{d}\mu = \int \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}.f \mathrm{d}\mu = \int g.f \mathrm{d}\mu.$$

On passe ensuite aux fonction mesurable positive via Beppo-Lévi puis aux fonctions mesurables.

Definition 1 (Mesure absolument continue/étrangère)

Soit μ, ν deux mesures sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. ν est absolument continue par rapport à μ, $\nu << \mu$, si et seulement si
$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mu(A) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(A) = 0$$
2. ν et μ ont étrangères, $\nu \perp \mu$,
$$\exists A \in \mathscr{A} \text{ tel que } \mu(A) = 0 \text{ et } \nu(A^c) = 0.$$

Exemple 2

Si ν est à densité f par rapport à μ, alors
$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\nu = 0,$$
donc $\nu << \mu$.

Theoreme 2 (Radon-Nikodym)

Soient μ une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ et ν une mesure σ-finie, absolument continue par rapport à μ alors il existe une fonction, mesurable, positive, f telle que

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \ A \in \mathscr{A}.$$

De plus, f est unique à une μ-équivalence près, c'est à dire que si f et g sont toutes deux densités de ν par rapport à μ alors

$$f = g \ \mu\text{-pp}.$$

On dira que f est la dérivée de Radon Nikodym de ν par rapport à μ et on note

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}, \ ou \ d\nu = f \, d\mu$$

de sorte que

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \ A \in \mathscr{A}.$$

preuve:
On va se contenter de montrer l'unicité, qui se limite à montrer que si f et g sont toutes deux des densités de ν par rapport à μ alors $f = g$ μ-presque partout.

Posons $A = \{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) \geq g(\omega)\}$, on a

$$\begin{aligned}\int |f-g| \mathrm{d}\mu &= \int_A |f-g| \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} |f-g| \mathrm{d}\mu = \int_A (f-g) \mathrm{d}\mu - \int_{A^c} f - g \mathrm{d}\mu \\ &= \nu(A) - \nu(A) - \nu(A^c) + \nu(A^c) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $|f-g| = 0$ μ-p.p. puis $f = g$.
□

Exemple 3

Une variable aléatoire de comptage N est une variable aléatoire réelle qui ne prends que des valeurs entières. Sa loi de probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}_N(A) = \mathbb{P}(N \in A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N = n)\delta_n(A), \ A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},$$

absolument continue par rapport à la mesure de comptage, définie par

$$\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A), \ A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},$$

qui compte le nombre d'entier dans A. En effet, on observe que pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_N(A) = 0.$$

Donc $\mathbb{P}_X << \nu$ donc par application du théorème de R-N, il existe une application p_N telle que

$$\mathbb{P}_N(A) = \int_A p_N(x)\mathrm{d}\nu(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_N(n)\delta_n(A), \ A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

On identifie alors la loi de probabilité de N avec la dérivée de R-N de $\mathbb{P}_N$ par rapport à ν. Cela donne

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}_N(n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2 (Décomposition de Lebesgue)

Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Il existe alors une application mesurable positive f, unique à une μ équivalence près, et une mesure γ sur $(\Omega, \mathscr{A})$, unique, étrangère à μ telles que

$$\nu = f.\mu + \gamma,$$

c'est à dire

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu + \gamma(A), \ A \in \mathscr{A}.$$

Exemple 4

Soit une variable aléatoire défini par

$$X = \mathbb{I}_A \times U$$

où

- A désigne l'évènement l'assuré reporte au moins un sinistre dans l'année
- X est une variable aléatoire réelle positive égale au montant des indemnisations versées à l'assuré. La loi de cette variable aléatoire est à densité f_U par rapport à la mesure de Lebesgue.

La loi de X est une loi de probabilité mixte au sens ou

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(A)\delta_0(A) + [1 - \mathbb{P}(A)] \int_A f_U(u) \mathrm{d}\lambda(u), \ A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

On remarque que δ_0 et λ sont étrangères avec

$$\lambda(\{0\}) = 0 \text{ et } \delta_0 \left[\{0\}^c\right] = 0.$$

II. Intégration par rapport à une mesure image

On rappelle que si f est une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ dans $(E, \mathscr{B})$, on note μ^f la mesure sur $\mathscr{B}$ définie par $\mu^f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$. Le théorème suivant permet l'intégration par rapport à une mesure image.

Theoreme 3 (Théorème de transfert)

Soit $h : E \mapsto \mathbb{R}$ une application mesurable réelle, h est μ^f-intégrable si et seulement si $h \circ f$ est μ-intégrable et

$$\int_E h d\mu^f = \int_\Omega h \circ f \, d\mu.$$

preuve:

$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathscr{A},\mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"'] & (E,\mathscr{B},\mu^f) \arrow[d, "h"] \\
 & (\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})
\end{tikzcd}$$

Si $h=\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ est une application mesurable positive, alors $h\circ f=\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\circ f$.
Remarquons que

$$(\mathbb{1}_{A_i}\circ f)(\omega)=\mathbb{1}_{A_i}[f(\omega)]=\begin{cases}1 & \text{si } f(\omega)\in A_i \Leftrightarrow \omega\in f^{-1}(A_i)\\ 0 & \text{si } f(\omega)\notin A_i \Leftrightarrow \omega\notin f^{-1}(A_i)\end{cases}$$

et donc $\mathbb{1}_{A_i}\circ f=\mathbb{1}_{f^{-1}(A_i)}$. On en déduit que

$$\int_\Omega h\circ f \mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^k \alpha_i\int \mathbb{1}_{A_i}\circ f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^k \alpha_i\int \mathbb{1}_{f^{-1}(A_i)}\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^k \alpha_i\mu\left[f^{-1}(A_i)\right]=\sum_{i=1}^k \alpha_i\mu^f(A_i)=\int h\mathrm{d}\mu^f.$$

Pour h mesurable positive, on définit une suite croissante de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées positives convergeant vers h. La suite $(h_n\circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, de fonction étagées positives qui convergent vers $h\circ f$. Par application du théorème de Beppo Lévy, il vient

$$\int h\mathrm{d}\mu^f = \lim_{n\to+\infty}\int h_n\mathrm{d}\mu^f = \lim_{n\to+\infty}\int h_n\circ f\mathrm{d}\mu = \int h\circ f\mathrm{d}\mu.$$

Pour le cas h mesurable, on observe que

$$\int |h|\mathrm{d}\mu^f = \int |h|\circ f\mathrm{d}\mu = \int |h\circ f|\mathrm{d}\mu,$$

donc h est μ^f-intégrable si et seulement si $h\circ f$ est μ-intégrable et dans ce cas

$$\begin{aligned}\int h\mathrm{d}\mu^f &= \int h^+ - h^-\mathrm{d}\mu^f = \int h^+\mathrm{d}\mu^f - \int h^-\mathrm{d}\mu^f\\ &= \int h^+\circ f\mathrm{d}\mu - \int h^-\circ f\mathrm{d}\mu = \int h\circ f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Corollaire 1

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ à valeur dans un espace mesurable $(E,\mathscr{B})$, et de loi $\mathbb{P}_X$. Soit g une application mesurable de $(E,\mathscr{B})$ vers $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Alors l'espérance de $g\circ X$ existe si et seulement si g est $\mathbb{P}_X$-intégrable et

$$\mathbb{E}(g\circ X)=\mathbb{E}[g(X)]=\int_\Omega g\circ X d\mathbb{P}=\int_E g d\mathbb{P}_X.$$

Definition 2 (Espérance mathématique)

Si X est une variable aléatoire réelle $\mathbb{P}$-intégrable, l'espérance mathématique de X est définie par

$$\mathbb{E}(X)=\int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega)=\int X\mathrm{d}\,\mathbb{P}.$$

Remarque 3

L'application du corollaire précédent en prenant $g=\mathrm{Id}$ conduit à écrire

$$\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

Exemple 5

1. Si $(E,\mathscr{B})=(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ et si $P_X=\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\delta_{x_n}$ (X est une v.a. discrète) alors $\mathbb{E}(g\circ X)$ existe si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n|g(x_n)|<\infty$ et
$$\mathbb{E}[g(X)]=\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n g(x_n).$$
2. Si $(E,\mathscr{B})=(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ et si P_X est a densité par rapport à la mesure de Lebesgue, $\mathbb{E}(g\circ X)$ existe si et seulement si $g.f$ est Lebesgue-intégrable et
$$\mathbb{E}[g(X)]=\int g(x)f_X(x)\mathrm{d}\lambda(x).$$

III. Intégrale par rapport à une mesure produit

1. Mesure produit

L'objet de cette partie est de répondre à deux questions

- Soient $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, existe-t-il une mesure μ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ telle que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$$

- Si une telle mesure existe, et si f est μ-intégrable, peut-on calculer $\int f d\mu$ en utilisant des intégration par rapport à μ_1 et à μ_2?

Soit la tribu produit $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Pour $A \in \mathscr{A}$, les sections

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \ ; \ (\omega_1, \omega_2) \in A\} \text{ et } A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \ ; \ (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

sont mesurables (i.e. $A_{\omega_1} \in \mathscr{A}_2$ et $A_{\omega_2} \in \mathscr{A}_1$).

Theoreme 4 (Mesure produit)

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finie définies respectivement sur $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$.

1. *Pour tout A de $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$, les applications*

$$\begin{array}{rcl} (\Omega_2, \mathscr{A}_2) \mapsto \left(\overline{\mathbb{R}}^+, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}\right) & \quad \text{et} \quad & (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \mapsto \left(\overline{\mathbb{R}}^+, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}\right) \\ \omega_2 \mapsto \mu_1(A_{\omega_2}) & & \omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1}). \end{array}$$

   sont mesurables.

2. *L'unique mesure μ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ telle que*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \text{ pour tout } A_1 \in \mathscr{A}_1 \text{ et } A_2 \in \mathscr{A}_2,$$

   est l'application définie par

$$\mu(A) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2}) d\mu_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) d\mu_1(\omega_1)$$

   et notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

preuve: Admis

Si $A = A_1 \times A_2$ alors

$$A_{\omega_2} = \begin{cases} A_1 & \text{si } \omega_2 \in A_2 \\ \emptyset & \text{si } \omega_2 \notin A_2 \end{cases}$$

et par suite

$$\mu_1(A_{\omega_2}) = \mu_1(A_1)\mathbb{1}_{A_2}(\omega_2) = \begin{cases} \mu(A_1) & \text{si } \omega_2 \in A_2, \\ 0 & \text{si } \omega_2 \notin A_2. \end{cases}$$

On peut faire les mêmes remarques pour A_{ω_2} et on en déduit que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2})\mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\mathrm{d}\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}\mu_2\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} \mathbb{1}_A(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}\mu_1\mathrm{d}\mu_2 \end{aligned}$$

On peut donc inter-changer l'ordre d'intégration pour les fonctions indicatrices, l'objet des théorèmes suivant est de changer l'ordre d'intégration pour des fonctions mesurables.

2. Théorème de Fubini et Tonelli

Theoreme 5 (Tonelli)

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ *mesurable.*

- $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ *est mesurable pour tout* $\omega_1 \in \Omega_1$ *et la fonction*
$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)$$
est mesurable et positive.
- $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ *est mesurable pour tout* $\omega_2 \in \Omega_2$ *et la fonction*
$$\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)$$
est mesurable et positive.

Enfin, on a les égalités

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1). \end{aligned}$$

Theoreme 6 (Fubini)

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \mapsto \mathbb{R}$ *mesurable. Si*

$$\int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty,$$

alors

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1). \end{aligned}$$

Exemple 6

Nous cherchons à évaluer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y}\mathrm{d}y$$

Notons que $g: y \mapsto \dfrac{e^{-y}\sin^2(y)}{y}$ est continue sur $]0,\infty[$ et donc localement intégrable.

- Lorsque $x \to 0$ alors
$$\frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y} = e^{-y}y\frac{\sin^2(y)}{y^2} \to 0$$
et donc g est prolongeable par continuité en 0.
- Lorsque $x \to \infty$, on a
$$g(y) = o(e^{-y})$$
donc g est intégrable au voisinage de ∞.

La fonction g est Riemann intégrable sur $]0,\infty[$, elle donc Lebesgue intégrable et les deux intégrables coincident. On définit $f:(x,y)\mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ et on note que

$$|f(x,y)|<e^{-y}, \text{ pour tout } (x,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+$$

et donc que f est λ_2 intégrable sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ On remarque que $x\mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ est continue sur $[0,1]$ donc Riemann intégrable puis Lebesgue intégrable et

$$\int_{[0,1]} e^{-y}\sin(2xy)\mathrm{d}\lambda(x)=e^{-y}\frac{sin^2 y}{y}.$$

Par Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}^+} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,1]}\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y)\end{aligned}$$

De plus

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\mathrm{d}\lambda(y)=\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\mathrm{d}\lambda(y)=\frac{2x}{1+4x^2}$$

après deux intégrations par parties. On a également

$$\int_{[0,1]} \frac{2x}{4x^2+1} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 \frac{2x}{4x^2+1} \mathrm{d}x = \ln(5)/4$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y} \mathrm{d}y = \ln(5)/4.$$

IV. Changement de variables
1. Fonction de répartition

Definition 3 (Fonction de répartition)

La fonction de répartition F d'une mesure ν définie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ est définie par

$$F(x) = \nu(]-\infty, x]), \; x \in \mathbb{R}.$$

Le résultat suivant établit un lien entre l'absolue continuité d'une mesure ν sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ par rapport à la mesure de Lebesgue et l'absolue continuité de la fonction de répartition F sur $]a, b[$ définie par

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \eta > 0 \text{ tel que } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} [F(b_n) - F(a_n)] < \epsilon,$$

avec $a \leq a_n < b_n \leq b, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theoreme 7

Si ν est une mesure finie $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, alors sa fonction de répartition F est absolument continue si et seulement si ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur R.

Theoreme 8

Soit F une application absolument continue. Sa dérivé F' est λ-presque partout définie et intégrable avec

$$F(x) = \int_{]-\infty,x]} F'(t) d\lambda(t).$$

F est donc la fonction de répartition d'une mesure ν absolument continue par rapport à λ dont la densité de Radon-Nykodim est F'.

2. Théorème de changement de variables

Soit $\Phi :]a,b[\mapsto]\phi(a),\phi(b)[$ strictement croissante et de dérivée Φ' continue. Soit μ la mesure image, définie sur $(]a,b[,\mathscr{B}_{]a,b[})$, de la mesure de Lebesgue sur $(]\phi(a),\phi(b)[,\mathscr{B}_{]\phi(a),\phi(b)[})$. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mesurable et Lebesgue intégrable sur $]\phi(a),\phi(b)[$. En résumé,

$$\begin{tikzcd}
(]a,b[,\mathscr{B}_{]a,b[},\mu) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi"'] & (]\phi(a),\phi(b)[,\mathscr{B}_{]\phi(a),\phi(b)[},\lambda) \arrow[d, "f"] \\
& (\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})
\end{tikzcd}$$

On note que $\mu(]a,x[) = \lambda(]\Phi(a),\Phi(x)[) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Cela implique que la fonction de répartition de μ est absolument continue et donc que μ est absolument continue par rapport à Lebesgue, sa densité est la dérivée de $\Phi(x) - \Phi(a)$ soit $\Phi'(x)$. On en déduit par le théorème de transfert que

$$\int_{]\phi(a),\Phi(b)[} f \mathrm{d}\lambda = \int_{]a,b[} f \circ \Phi \mathrm{d}\mu = \int_{]a,b[} f(\Phi(x))\Phi'(x)\mathrm{d}\lambda(x).$$

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \mapsto V$ une bijection, dont les dérivées partielle sont continues. On note

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) := (y_1, \dots, y_n) = y, \text{ pour } x = (x_1, \dots, x_n).$$

La matrice jacobienne de ϕ est définie par

$$\frac{D\phi}{Dx}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}, \text{ pour } x \in U,$$

son déterminant $\det\left(\frac{D\phi}{Dx}(x)\right)$ est appelé jacobien.

Theoreme 9 (Formule de changement de variable)

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une application Lebesgue intégrable sur V, alors

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f[\Phi(x)] \left| det\left(\frac{D\phi}{Dx}(x)\right)\right| d\lambda_n(x).$$

A noter que la formule fait intervenir la valeur absolue du Jacobien.

Exemple 7 (Intégrale de Gauss)

On souhaite calculer

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x.$$

Comme $f:(x,y) \mapsto \exp\left(-a(x^2+y^2)\right)$ est Riemann intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$ alors elle est Lebesgue intégrable, par Fubini on peut écrire

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-a(x^2+y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}(y) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \exp\left(-a(x^2+y^2)\right) \mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

L'application

$$\phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y).$$

est une bijection de $\mathbb{R}_+ \times]0,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ qui possède des dérivée partielle. Le Jacobien de Φ est donné par

$$\left|\frac{D\phi}{D(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Par application de la formule de changement de variable, il vient

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}_+^2} \exp\left(-a(x^2+y^2)\right) \mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+ \times]0,\pi/2[} \exp\left(-ar^2\right) r \mathrm{d}\lambda^2(r,\theta) \Leftrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

VI. Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times T \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, où T est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que, $\forall t \in T$ $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est mesurable par rapport à $\mathscr{A}$ et intégrable par rapport à μ.

Proposition 3 (Continuité de l'intégrale)

Si $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue μ-presque partout et qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que

$$|f(\omega, t)| \leq g(\omega), \ \forall t \in T.$$

Alors

$$F(t) = \int_{\Omega} f(\omega, t) d\mu(\omega)$$

est continue sur T.

preuve: Comme T est un espace métrique, la continuité est caractérisée par le comportement des suites. $F(t)$ est continue si pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers t, $F(t_n)$ converge vers $F(t)$. La suite de fonction $(f(\omega, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\omega, t)$ par continuité de $t \mapsto f(\omega, t)$ puis comme $|f(\omega, t_n)| \leq g(\omega)$ alors $(F(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(t)$ en vertu du théorème de convergence dominée.

Proposition 4 (Dérivabilité de l'intégrale)

Si $t \mapsto f(\omega, t)$ est dérivable par rapport à t μ-presque partout et qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\right| \leq g(\omega), \ \forall t \in T.$$

Alors

$$F(t) = \int_\Omega f(\omega, t) d\mu(\omega)$$

définit une fonction dérivable sur T, avec

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) d\mu(\omega).$$

preuve:

Il s'agit de montrer que pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) \mathrm{d}\mu(\omega).$$

On pose $f_n(\omega) = \frac{f(\omega,t_n)-f(\omega,t)}{t_n-t}$, qui est une suite de fonctions mesurables convergeant vers $\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)$ qui est donc mesurable. De plus, le théorème des accroissements finis entraine l'inégalité

$$|f_n(\omega)| \leq g(\omega).$$

L'application du théorème de convergence dominée sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_\Omega f_n(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega) \to \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Exemple 8 (La fonction Gamma)

On note Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,\ x \in]0,+\infty[$$

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \geq 1.$$

1. Vérifier que Γ est bien définie.

2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \log(t) \mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite
$$u_n = H_n - \log(n), \;\; n \geq 1$$
admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, auusi appelé constante d'Euler.
4. montrer que
$$H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} \mathrm{d}v, \;\; n \geq 1.$$
5. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log(v) \mathrm{d}v.$$
6. Etablir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
7. On pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t) \mathrm{d}t$. Montrer que
$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log(t) \mathrm{d}t.$$
8. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
<u>Hint:</u> On pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log(n) - H_{n+1})$.

Bibliographie

Mes notes se basent sur les ouvrages suivants [1, 3, 2, 4]

Philippe Barbe and Michel Ledoux.
Probabilité.
L'Editeur: EDP Sciences, 2007.

Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin.
Mesure, intégration, probabilités.
Ellipses, https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/637007/filename/mes-int-pro.pdf, 2013.

Jacques Gapaillard.
Intégration pour la licence: cours avec exercices corrigés.
Masson, 1997.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.