Intégration L3 Actuariat

Chapitre IV: Intégration

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
October 25, 2018

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous allons définir l'intégrale d'une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mesurable. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.

I. Définition de l'intégrale et propriétés de base

On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives. Soit $f \in \mathscr{M}_+$. On définit l'intégrale de f, notée $\int f \mathrm{d}\mu$ ou $\int f(\omega) \mathrm{d}\mu$ par

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sup \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega) \ ; \ \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des partitions $(\Omega_i)_{i \in I}$ de Ω et I est un ensemble fini d'indice. On note

$$I\left((\Omega_i)_{i \in I}, f\right) = \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega) \ ; \ \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i)$$

Remarque 1

Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ et $(\Omega'_j)_{j \in J}$ deux partitions de Ω. $(\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est encore une partition de Ω telle que $I\left((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f\right) \geq I\left((\Omega_i)_{i \in I}, f\right)$

II. Intégrale des fonctions étagées positives

Le passage de la mesure d'un ensemble à la mesure d'une fonction (ou intégrale d'une fonction) procède d'une idée simple. Pour $A \subset \Omega$, on attribue la mesure $\mu(A)$ à la fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2

Si $A \in \mathscr{A}$, la fonction indicatrice de A, $f(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega), \forall \omega \in \Omega$ est mesurable. En effet, $f^{-1}(\{1\}) = A \in \mathscr{A}$ et $f^{-1}(\{0\}) = A^c \in \mathscr{A}$.

Definition 1 (Intégrale de la fonction indicatrice)

et son intégrale par rapport à μ est définie par

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega) = \mu(A)$$

Plus généralement, si $B \in \mathbb{A}$, l'intégrale de $f = \mathbb{1}_A$ sur B par rapport à μ est définie par

$$\int_B \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{1}_A(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega) = \mu(A \cap B).$$

Definition 2 (Fonction étagées)

On appelle fonction étagée une fonction $f:\Omega \mapsto \mathbb{R}$, défine par

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_i \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathscr{A}$, et $a_1, \ldots, a_n$ des coefficients réels. On parle de fonction étagées positive si $a_1, \ldots, a_k \geq 0$. On note $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}_+$) l'ensemble des fonctions étagées (resp. positives).

Lemme 1

Soit $f \in \mathscr{M}_+$, $A \in \mathscr{A}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\int f + \mathbb{I}_A d\mu = \int f d\mu + \mu(A)$$

preuve:
Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition quelconque. On note que

$$\inf\{f + \alpha \mathbb{I}_A \ ; \ \omega \in \Omega_i \cap A\} = \inf\{f \ ; \ \omega \in \Omega_i \cap A\} + \alpha, \text{ pour tout } i \in I$$

et

$$\inf\{f + \alpha \mathbb{I}_A \ ; \ \omega \in \Omega_i \cap A^c\} = \inf\{f \ ; \ \omega \in \Omega_i \cap A\}, \text{ pour tout } i \in I$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
I((\Omega_i)_{i\in I}, f+\alpha \mathbb{I}_A) &\leq I[\{(\Omega_i\cap A)_{i\in I}, (\Omega_i\cap A^c)_{i\in I}\}, f+\alpha\mathbb{I}_A] \\
&= \sum_{i\in I} \inf\{f+\alpha\mathbb{I}_A \ ; \ \omega\in\Omega_i\cap A\}\mu(\Omega_i\cap A) \\
&+ \inf\{f+\alpha\mathbb{I}_A \ ; \ \omega\in\Omega_i\cap A^c\}\mu(\Omega_i\cap A^c) \\
&= I[\{(\Omega_i\cap A)_{i\in I}, (\Omega_i\cap A^c)_{i\in I}\}, f] + \alpha\mu(A) \\
&= \int f \mathrm{d}\mu + \alpha\mu(A)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\int f+\mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu \geq \int f\mathrm{d}\mu + \mu(A)$. Supposons que $\int f \mathrm{d}\mu > M$, alors il existe une partition $(\Omega_i)_{i\in I}$ de Ω telle que $I((\Omega_i)_{i\in I}, f) \geq M$. On a alors

$$\begin{aligned}
I[\{(\Omega_i\cap A)_{i\in I}, (\Omega_i\cap A^c)_{i\in I}\}, f+\alpha\mathbb{I}_A] &= I[\{(\Omega_i\cap A)_{i\in I}, (\Omega_i\cap A^c)_{i\in I}\}, f] + \alpha\mu(A) \\
&\geq I((\Omega_i)_{i\in I}, f) + \alpha\mu(A) \\
&\geq M + \alpha\mu(A)
\end{aligned}$$

On choisit alors M aussi proche de $\int f\mathrm{d}\mu$ que possible pour conclure la preuve.

Proposition 1 (Intégrale d'une fonction étagée positive)

Soit $f \in \mathscr{E}_+$, l'intégrale de f par rapport à μ est donnée par

$$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int \mathbb{I}_{A_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k),$$

L'intégrale de l'intégrale de f sur $B \in \mathscr{A}$ par rapport à μ est donnée par

$$\int_B f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_B \mathbb{I}_{A_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap B),$$

preuve:
Simple application du lemme 1

□

La resprésentation d'une fonction étagée n'étant pas unique, il est important de s'assurer que pour une même fonction étagée, deux représentations mènent à la même mesure intégrale.

Lemme 2

Soit $f \in \mathscr{E}_+$ admettant deux représentations disjointes telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}.$$

alors

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(B_i).$$

preuve:
On pose

$$A_0 = \Omega / \bigcup_{i=1}^{p} A_i,\; B_0 = \Omega / \bigcup_{j=1}^{q} B_j, \text{ et } \alpha_0 = \beta_0 = 0.$$

et on note que

$$A_i = \cup \bigcup_{j=0}^{q} B_j \cap A_i, \text{ pour } i = 0, \ldots, p \text{ et } B_j = \cup \bigcup_{i=0}^{p} B_j \cap A_i, \text{ pour } j = 0, \ldots, q.$$

On obtient deux nouvelles représentations disjointes pour la fonction considérée avec

$$f = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}.$$

On constate que dès lors que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ alors $\alpha_i = \beta_j$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=0}^{q} A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j \sum_{i=0}^{p} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{q} \beta_i \mu\left(\bigcup_{i=0}^{p} A_i \cap B_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu(B_j)
\end{aligned}$$

$\square$

Le lien entre fonctions mesurables positives et étagées se concrétisent avec les résultat suivant. On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonction mesurables de Ω vers $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Theoreme 1

Toute fonction $f \in \mathscr{M}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonction de $\mathscr{E}_+$.

preuve:
Posons

$$f_n = n\mathbb{I}_{\{f\geq n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{I}_{\left\{\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}\right\}},\ n\geq 1.$$

Par exemple,

$$f_1 = \mathbb{I}_{\{f\geq 1\}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2}\leq f<1\right\}},\ n\geq 1.$$

et

$$f_2 = 2\mathbb{I}_{\{f\geq 2\}} + \frac{1}{4}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{4}\leq f<\frac{1}{2}\right\}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2}\leq f<\frac{3}{4}\right\}} + \ldots,\ n\geq 1.$$

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions étagées positives.

- qui converge vers f. En effet,
  - Si $\omega\in\{f=+\infty\}$ alors $f(\omega)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
  - Si $\omega\in\{f<+\infty\}$ alors pour $\epsilon>0$, il existe N tel que $\frac{1}{2^N}<\epsilon$ et $f(x)<N$ donc pour $n\geq N$ il existe $k\in\{0,1,\ldots,n2^n-1\}$ pour lequel $\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}$. Par suite

$$0\leq f(\omega)-f_n(\omega) = f(\omega)-\frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

- qui est croissante, c'est à dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\omega\in\Omega$, $f_n(\omega)\leq f_{n+1}(\omega)$
  - Si $f_n(\omega)=0$ alors le résultat est trivial,
  - Si $f_n(\omega)>0$ alors
    - Si $\omega\in\{f=\infty\}$ alors $f_n(\omega)=n<n+1=f_{n+1}(\omega)$

- Si $\omega \in \{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}$ pour un $k \in \{0, 1, 2, \dots, n2^n - 1\}$ alors

$$f_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \begin{cases} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right\} \\ < \frac{2k+1}{2^{k+1}} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{ \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}. \end{cases}$$

□

Corollaire 1

Pour une fonction $f : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, les condtions suivantes sont équivalentes

(i) *f est mesurable*

(ii) *f est limite simple de fonction étagées.*

preuve:

(i)⇒ (ii), on a $f = f^+ - f^-$. Comme $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ alors il existe (g_n) et (h_n) des suites croissantes de fonction étagées positives qui converge simplement vers f^+ et f^-. Par suite, $f_n = g_n - h_n, n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers f.

(ii)⇒ (i) f est mesurable comme limite d'une suite de fonction mesurables.

□

III. Intégrale des fonctions mesurables et théorèmes de convergence

L'introduction des fonctions étagées permet de donner une définition alternative à l'intégrale d'une fonction $f \in \mathscr{M}_+$.

Definition 3 (Par les fonctions étagées positives)

L'intégrale d'une fonction $f \in \mathscr{M}_+$ par rapport à μ sur $B \subset \Omega$ est définie par

$$\int_B f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_B g \mathrm{d}\mu \ ; \ g \in \mathscr{E}^+ \ , \ g \leq f \right\}$$

Cette définition permet de démontrer aisément les propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables.

Definition 4 (μ-presque partout)

Une propriété $\mathscr{P}$ relative aux points de Ω est vérifiée μ-presque partout (μ-p.p.) si il existe $A \subset \Omega$ de mesure nulle tel que $\forall x \in \Omega / A \ \mathscr{P}(x)$ soit vérifiée.

Proposition 2

Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $A, B \subset \Omega$

(i) *Si $f \leq g$ alors $0 \leq \int_B f\,d\mu \leq \int_B g\,d\mu$*

(ii) *Si $A \subset B$ et $f \geq 0$, alors $\int_A f\,d\mu \geq \int_B f\,d\mu$*

(iii) *Pour $c \geq 0$, on a $\int_B cf\,d\mu = c\int_B f\,d\mu$*

(iv) *Si $f = 0$ alors $\int_B f\,d\mu = 0$*

(v) *Si $\mu(B) = 0$ alors $\int_B f\,d\mu = 0$*

(vi) *Si $f \geq 0$ alors $\int_B f\,d\mu \geq 0$*

(vii) *Si $f \geq 0$ et $\int_B f\,d\mu = 0$, alors $\mathbb{1}_B f = 0$ μ-p.p.*

Preuve:
Pour les assertions (i)-(vi), on vérifie les propriétés sur les fonctions étagées avant de passer au supremum pour les fonctions mesurables positives. Par exemple, pour (iii), si $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$ alors

$$\int_B cf\,\mathrm{d}\mu = \int_B \sum_{k=1}^n ca_k \mathbb{1}_{A_k}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n ca_k \mu(A_k \cap B) = c\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap B) = c\int_B f\,\mathrm{d}\mu.$$

Pour (vii), quitte à remplacer f par $f\mathbb{1}_B$, on peut montrer le résultat pour $B = \Omega$. Considérons la suite croissante d'évènements

$$A_n = \{\omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) \geq 1/n\},\ n \geq 1.$$

On vérifie que $\mathbb{1}_{A_n} \leq n^{-1} f$, puis par application de (i) et (iii), il vient

$$\mu(A_n) = \int \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu < n^{-1} \int f \mathrm{d}\mu = 0.$$

Par suite,

$$\mu\left(\{f > 0\}\right) = \mu\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Comme $f \geq 0$ alors on en déduit que $f = 0$ μ-p.p.

Theoreme 2 (Beppo Lévi)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement (μ-p.p.) vers f alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f\, d\mu.$$

preuve:

On montre d'abord une forme faible de ce théorème, soit $f \in \mathscr{E}^+$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements de $\mathbb{A}$ réunion notée E. On a

$$\lim_{n\to\infty}\int \mathbb{1}_{E_n} f\, \mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_E f\, \mathrm{d}\mu.$$

Comme $f \in \mathscr{E}^+$ alors f admet une représésentation disjointe $f = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et

$$\int f \mathbb{1}_{E_n} \mathrm{d}\mu = \int \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i\cap E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k a_i \int \mathbb{1}_{A_i\cap E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i\cap E_n) \mathrm{d}\mu$$

Comme $(A_i\cap E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements alors $\mu(A_i\cap E_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(A_i\cap E)$. On a finalement

$$\int f\mathbb{1}_{E_n}\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^k \mu(A_i\cap E) = \int f\mathbb{1}_E \mathrm{d}\mu$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_+$ une suite croissante de fonctions convergeant simplement vers f. Nous savons que cette limite est bornée par $\int f \mathrm{d}\mu$. Définissons

$$g = \sum_{i\in I} \inf\{f(\omega) \ ; \ \omega \in \Omega_i\} \mathbb{I}_{\Omega_i},$$

où $(\Omega_i)_{i\mathbb{I}}$ forme une partition de Ω. g est une fonction étagée positive. Soit

$$E_n = \{f_n \geq \alpha g\}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

avec $\alpha \in [0,1]$. $(E_n)_{n\in N}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A}$. Si $g(\omega) = 0$ alors $\omega \in E$, sinon, comme $\lim f_n = f \geq \alpha g$ alors on peut trouver n assez garnd tel que $\omega \in E_n$. Finalement $\cup_{n\in N} E_n = \Omega$, et donc en vertu de la forme faible du théorème il vient

$$\lim \int \mathbb{I}_{E_n} \alpha g \mathrm{d}\mu = \int \alpha g \mathrm{d}\mu.$$

On a

$$f_n \geq f_n \mathbb{I}_{E_n} \geq \mathbb{I}_{E_n} \alpha g \mathrm{d}\mu$$

d'où

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \lim \int \mathbb{I}_{E_n} \alpha g \mathrm{d}\mu = \int \alpha g \mathrm{d}\mu$$

Soit

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha I((\Omega_i)_{i\in I}, f)$$

La preuve se termine en faisant tendre α vers 1.

Remarque 3

La convergence des fonction étagées et le théorème de Beppo Lévi permettent de passer de l'intégrale des fonctions étagées positives à l'intégrale des fonction mesurable positives.

Corollaire 2 (Intégrale d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathscr{M}_+$ *et soit* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$*. Alors*

$$\int f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,d\mu.$$

Lorsque f prend des valeurs négatives alors on écrit f comme différence de fonctions positives avec

$$f = f^+ - f^-, \text{ où } f^+(\omega) = \max(f(\omega),0) \text{ et } f^-(\omega) = \max(-f(\omega),0)$$

Definition 5 (Fonction intégrable)

Si $\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ et $\int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$ alors f est intégrable et on peut définir

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu.$$

On note $\mathscr{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Proposition 3 (Linéarité de l'intégrale des fonctions de $\mathscr{L}^1$)

Soient $f, g \in \mathscr{M}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

De plus, si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

preuve:

On suppose dans un premier temps f et g positives et $\alpha > 0$. Soientt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de fonctions étagées positives de limites f et g. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int f_n + \alpha g_n \mathrm{d}\mu = \int f_n \mathrm{d}\mu + \alpha \int g_n \mathrm{d}\mu$$

puis

$$\int f + \alpha g \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \alpha \int g \mathrm{d}\mu,$$

en appliquant trois fois le théorème de Beppo Lévi.

Dans le cas où f et g sont intégrables alors on définit $h = f + \alpha g$. On note que si $\alpha > 0$ alors

$$\begin{aligned}
& h^+ - h^- = f^+ - f^- + \alpha g^+ - \alpha g^- \\
\Leftrightarrow \quad & h^+ + f^- + \alpha g^- = h^- + f^+ + \alpha g^+ \\
\Leftrightarrow \quad & \int h^+ \mathrm{d}\mu + \int f^- \mathrm{d}\mu + \alpha \int g^- \mathrm{d}\mu = \int h^- \mathrm{d}\mu + \int f^+ \mathrm{d}\mu + \alpha \int g^+ \mathrm{d}\mu \\
\Leftrightarrow \quad & \int h \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \alpha \int g \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$ alors $h^+ - h^- = f^+ - f^- - (-\alpha) g^+ + (-\alpha) g^-$ et on effectue le même raisonnement.
On suppose que $f \leq g$ alors $g - f \geq 0$ et $\int g \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathrm{d}\mu$ par application de la Proposition 2 (vi).

$\square$

Exemple 1 (Masse de Dirac et mesure de comptage)

Soit C la mesure de comptage sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et δ_x la mesure de Dirac associée au singleton $\{x\}$. On a

$$\int f \mathrm{d}\delta_x = f(x)$$

et

$$\int f \mathrm{d}C = \sum_{x \in \Omega} f(x)$$

où cette somme peut valoir ∞, f est intégrable à la condition que $\sum_{x \in \Omega} f(x) < +\infty$.

Exemple 2 (Intégration par rapport à la somme de deux mesures)

Soit μ, ν deux mesures sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et f une fonction mesurables telle que $\int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$ et $\int |f| \mathrm{d}\nu < \infty$ alors

$$\int f \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int f \mathrm{d}\mu + \int f \mathrm{d}\nu.$$

Exemple 3 (Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue)

Soit λ la mesure de Lebesgue et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Si f est continue par morceaux sur un intervalle compact $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]} f(\omega)\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

2. Si f est continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (avec potentiellement $b = \infty$), et que $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ alors

$$\int_{[a,b[} f(\omega)\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue par morceaux coincide avec l'intégrale de Riemann.

Lemme 3 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_+$, on a

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

preuve:

On pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, ce qui définit une suite croissante de fonctions positives dont la limite est $\varliminf_{n\to+\infty} f_n$, on a

$$f_n \geq g_n \Rightarrow \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int g_n \mathrm{d}\mu$$

d'où

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \varliminf_{n\to+\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu$$

puis par le théorème de Beppo Lévi, il vient

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \lim \int g_n \mathrm{d}\mu = \int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Remarque 4

Soit

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}, \text{ pour } n \geq 0,$$

alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$ et $\int f_n(x) d\lambda(x) = 1$ donc

$$0 = \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n d\lambda < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda = 1.$$

Exemple 4

Soit

$$f_n(x) = n \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{n^{1/3}}\right), \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } x \in]0,1[$$

On a $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = +\infty$ puis

$$+\infty = \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n d\lambda < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda$$

puis $\lim \int f_n d\mu = \infty$

Theoreme 3 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}$ convergeant presque partout vers f, et telle qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^1$ vérifiant $|f_n| \leq g$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

<u>preuve:</u>
Les fonctions f_n sont intégrables car dominées par g. Par suite, les fonctions $g + f_n$ et $g - f_n$ sont intégrables et positives: On peut leur appliquer le lemme de Fatou, ce qui donne

$$\int \underline{\lim}_{n\to+\infty} (g+f_n)\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int (g+f_n)\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int g\mathrm{d}\mu + \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

d'une part et

$$\int \underline{\lim}_{n\to+\infty} (g-f_n)\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int (g-f_n)\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int g\mathrm{d}\mu - \int \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \left(-\int f_n \mathrm{d}\mu\right).$$

d'autre part. On en déduit que

$$\int f\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \text{ et } \int f\mathrm{d}\mu \geq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

puis

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \to \int f\mathrm{d}\mu.$$

□

Exemple 5

Soit

$$f_n(x) = \frac{\sin^n(x)}{x^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in]1, +\infty[.$$

On a $|f_n(x)| \leq g(x) = \frac{1}{x^2}$ intégrable. Soit $N = \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, pour $x \in]1, +\infty[/N$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, comme N est de mesure nulle alors on a convergence de (f_n) vers 0 λ presque partout. Puis par application du théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{]1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{]1,+\infty[} \lim_{n \to +\infty} f_n \mathrm{d}\lambda = 0.$$

IV. Mesures à densité

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. L'application $\nu : \mathscr{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu,$$

est une mesure sur $\mathscr{A}$.

Definition 6 (Mesure à densité)

ν est une mesure à densité par rapport à μ de densité f.

Definition 7 (Mesure absolument continue/étrangère)

Soit μ, ν deux mesures sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. ν est absolument continue par rapport à μ, $\nu << \mu$, si

$$\forall A \in \mathscr{A}, \ \mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \nu(A) = 0$$

2. ν et μ ont étrangères, $\nu \perp \mu$,

$$\exists A \in \mathscr{A} \text{ tel que } \mu(A) = 0 \text{ et } \nu(A^c) = 0.$$

Soient μ et ν deux mesures σ-finie sur $(\Omega, \mathscr{A})$

Proposition 4 (Décomposition de Lebesgue)

Il existe une unique décomposition

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_{\perp}$$

dans laquelle ν_{ac} est absolument continue par rapport à μ et $\nu_{\perp}$ est étrangère à μ.

Theoreme 4 (Radon-Nikodym)

Si $\nu << \mu$, alors il existe une unique fonction mesurable positive f (à égalité μ p.p. près) telle que

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

f est appelée dérivée de Radon-Nikodym et parfois notée $\frac{d\nu}{d\mu}$.

preuve:
On va se contenter de montrer l'unicité, qui se limite à montrer que si f et g sont toutes deux des densités de ν par rapport à μ alors $f = g$ μ-presque partout.
Posons $A = \{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) \geq g(\omega)\}$, on a

$$\begin{aligned}\int |f-g| \mathrm{d}\mu &= \int_A |f-g|\mathrm{d}\mu + \int_{A^c} |f-g|\mathrm{d}\mu = \int_A (f-g)\mathrm{d}\mu - \int_{A^c} f - g\mathrm{d}\mu \\ &= \nu(A) - \nu(A) - \nu(A^c) + \nu(A^c) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $|f-g| = 0$ μ-p.p. puis $f = g$.

□

Supposons que $\nu << \mu$ et notons f la densité de ν par rapport à μ.

Proposition 5

Soit g une fonction mesurable, on a

$$\int |g| d\nu = \int |g| f \, d\mu.$$

Si cette quantité est finie alors

$$\int g \, d\nu = \int g f \, d\mu.$$

preuve:
Pour $g = \mathbb{I}_A$, avec $A \in \mathscr{A}$, on a

$$\int \mathbb{I}_A \mathrm{d}\nu = \nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

La propriété est vérifié pour les fonction étagées positives par linéarité puis pour les fonction mesurables positives par application du théorème de convergence monotone. Si g est mesurable et intégrable alors on écrit $g = g^+ - g^-$ puis

$$\int g \mathrm{d}\nu = \int (g^+ - g^-) \mathrm{d}\nu = \int g^+ \mathrm{d}\nu - \int g^- \mathrm{d}\nu = \int g^+ f \, \mathrm{d}\mu - \int g^- f \, \mathrm{d}\mu = \int g f \, \mathrm{d}\mu.$$

□

V. Intégration par rapport à une mesure image

On rappelle que si f est une application mesurable de $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ dans $(E,\mathscr{B})$, on note μ^f la mesure sur $\mathscr{B}$ définie par $\mu^f(B)=\mu[f^{-1}(B)]$. Le théorème suivant est une forme abstraite de la formule de changement de variable

Theoreme 5 (Théorème de transfert)

Soit $\phi : E \mapsto \mathbb{R}$ mesurable (borélienne), si ϕ est à valeurs positives alors

$$\int_E \phi d\mu^f = \int_\Omega \phi\circ f\, d\mu.$$

si ϕ est à valeurs quelconques alors ϕ est μ^f-intégrable si et seulement si $\phi\circ f$ est μ-intégrable, et dans ce cas, l'identité est encore vérifiée.

preuve:

Soit $\phi = \mathbb{I}_B$, pour $B\in\mathscr{B}$ alors on a

$$\begin{aligned}\int_E \mathbb{I}_B \mathrm{d}\mu^f &= \mu^f(B)=\mu\left[f^{-1}(B)\right]\\ &= \mu\left[\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)\in B\}\right]=\int \mathbb{I}_B\circ f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

La propriété étant vérifiée pour $\mathbb{I}_B$ alors elle est vérifiée pour les fonctions étagées positives par linéarité de l'intégrale. Pour ϕ mesurable positive, on définit une suite croissante de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées positives convergeant vers ϕ. La suite

$(\phi_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, de fonction étagées positives qui convergent vers $\phi\circ f$. Par application du théorème de Beppo Lévy, il vient

$$\int \phi \mathrm{d}\mu^f = \lim \int \phi_n \mathrm{d}\mu^f = \lim \int \phi_n \circ f \mathrm{d}\mu = \int \phi \circ f \mathrm{d}\mu.$$

Pour le cas ϕ mesurable, on observe que

$$\int |\phi| \mathrm{d}\mu^f = \int |\phi| \circ f \mathrm{d}\mu = \int |\phi \circ f| \mathrm{d}\mu,$$

donc ϕ est μ^f-intégrable si et seulement si $\phi\circ f$ est μ-intégrable et dans ce cas

$$\begin{aligned} \int \phi \mathrm{d}\mu^f &= \int \phi^+ - \phi^- \mathrm{d}\mu^f = \int \phi^+ \mathrm{d}\mu^f - \int \phi^- \mathrm{d}\mu^f \\ &= \int \phi^+ \circ f \mathrm{d}\mu - \int \phi^- \circ f \mathrm{d}\mu = \int \phi \circ f \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

□

VI. Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times T \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, où T est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que, $\forall t \in T$ $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est mesurable par rapport à $\mathscr{A}$ et intégrable par rapport à μ.

Proposition 6 (Continuité de l'intégrale)

Si $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue μ-presque partout et qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que

$$|f(\omega, t)| \leq g(\omega), \ \forall t \in T.$$

Alors

$$F(t) = \int_\Omega f(\omega, t) d\mu(\omega)$$

est continue sur T.

preuve: Comme T est un espace métrique, la continuité est caractérisée par le comportement des suites. $F(t)$ est continue si pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t, $F(t_n)$ converge vers $F(t)$. La suite de fonction $(f(\omega, t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\omega, t)$ par continuité de $t \mapsto f(\omega, t)$ puis comme $|f(\omega, t_n)| \leq g(\omega)$ alors $(F(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(t)$ en vertu du théorème de convergence dominée.

Proposition 7 (Dérivabilité de l'intégrale)

Si $t \mapsto f(\omega,t)$ est dérivable par rapport à t μ-presque partout et qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\right| \leq g(\omega),\ \forall t \in T.$$

Alors

$$F(t) = \int_\Omega f(\omega,t)d\mu(\omega)$$

définit une fonction dérivable sur T, avec

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)d\mu(\omega).$$

preuve:
Il s'agit de montrer que pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\mathrm{d}\mu(\omega).$$

On pose $f_n(\omega) = \frac{f(\omega,t_n)-f(\omega,t)}{t_n-t}$, qui est une suite de fonctions mesurables convergeant vers $\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)$ qui est donc mesurable. De plus, le théorème des accroissements finis entraine l'inégalité

$$|f_n(\omega)| \leq g(\omega).$$

L'application du théorème de convergence dominée sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_\Omega f_n(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega) \to \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Exemple 6 (La fonction Gamma)

On note Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,\ x\in]0,+\infty[$$

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n\geq 1.$$

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log(t)\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite
$$u_n = H_n - \log(n),\ n\geq 1$$
admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, auusi appelé constante d'Euler.

4. montrer que
$$H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\mathrm{d}v,\ \ n \geq 1.$$
5. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log(v)\mathrm{d}v.$$
6. Etablir que pour tout $t \geq 0$, $1-t \leq e^{-t}$.
7. On pose $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log(t)\mathrm{d}t$. Montrer que
$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log(t)\mathrm{d}t.$$
8. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
Hint: On pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log(n) - H_{n+1})$.

1. Tribu et mesures produits

Soient $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables.

Definition 8 (Tribu produit)

La tribu produit associée à $\Omega_1 \times \Omega_2$ est la tribu engendrée par les ensembles

$$A_1 \times A_2 \text{ avec } A_1 \in \mathscr{A}_1 \text{ et } A_2 \in \mathscr{A}_2,$$

notée $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.

Remarque 5

Les applications projections

$$\pi_1 : (x,y) \mapsto x \text{ de } \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ dans } \Omega_1,$$

et

$$\pi_2 : (x,y) \mapsto y \text{ de } \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ dans } \Omega_2,$$

sont mesurables. En effet, $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1$ on a $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times \Omega_2 \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$

Proposition 8

Si $\mathscr{A}_1 = \sigma((A_{1,i})_{i\in I}$ *et* $\mathscr{A}_2 = \sigma((A_{2,j})_{j\in J})$ *alors*

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma((A_{1,i} \times A_{2,j})).$$

On a également $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$.

Soient $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Soit la tribu produit $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Pour $A \in \mathscr{A}$, les sections

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \ ; \ (\omega_1, \omega_2) \in A\} \text{ et } A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \ ; \ (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

sont mesurables (i.e. $A_{\omega_1} \in \mathscr{A}_2$ et $A_{\omega_2} \in \mathscr{A}_1$).

Theoreme 6 (Tribu produit)

Si μ_1 *et* μ_2 *sont* σ*-finies. Il existe une unique mesure* m *sur* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ *telle que*

$$m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) m_2(A_2), \text{ pour tout } A_1 \in \mathscr{A}_1 \text{ et } A_2 \in \mathscr{A}_2,$$

notée $m = \mu_1 \otimes \mu_2$.

preuve: Admis

$\square$

Si $A = A_1 \times A_2$ alors

$$A_{\omega_2} = \begin{cases} A_1 & \text{si } \omega_2 \in A_2 \\ \emptyset & \text{si } \omega_2 \notin A_2 \end{cases}$$

et par suite

$$\mu_1(A_{\omega_2}) = \mu(A_1)\mathbb{1}_{A_2}(\omega_2) = \begin{cases} \mu(A_1) & \text{si } \omega_2 \in A_2, \\ 0 & \text{si } \omega_2 \notin A_2. \end{cases}$$

On peut faire les mêmes remarques pour A_{ω_2} et on en déduit que

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2}) \mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) \mathrm{d}\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(\omega_1, \omega_2) \mathrm{d}\mu_2 \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_A(\omega_1, \omega_2) \mathrm{d}\mu_1 \mathrm{d}\mu_2 \end{aligned}$$

On peut donc inter-changer l'ordre d'intégration pour les fonctions indicatrices, l'objet des théorémes suivant est de changer l'ordre d'intégration pour des fonctions mesurables.

Theoreme 7 (Tonelli)

Soit $f:\Omega_1\times\Omega_2\mapsto\overline{\mathbb{R}}^+$ *mesurable.*

- $\omega_2\mapsto f(\omega_1,\omega_2)$ *est mesurable pour tout* $\omega_1\in\Omega_1$ *et la fonction*

$$\omega_1\mapsto\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)$$

  est mesurable et positive.

- $\omega_1\mapsto f(\omega_1,\omega_2)$ *est mesurable pour tout* $\omega_2\in\Omega_2$

$$\omega_2\mapsto\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_1(\omega_1)$$

  est mesurable et positive.

Enfin, on a les égalités

$$\begin{aligned}\int f\,d(\mu_1\otimes\mu_2) &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_1(\omega_1)\right)d\mu_2(\omega_2)\\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)\right)d\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

Theoreme 8 (Fubini)

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \mapsto \mathbb{R}$ *mesurable. Si*

$$\int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty,$$

alors

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1). \end{aligned}$$

3. Changement de variables

Soient O et O' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\phi : O \mapsto O'$ un C1-difféomorphisme (application bijective, différentiable et de réciproque différentiable). On note

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_d(x)), \text{ pour } x = (x_1, \dots, x_d).$$

La matrice jacobienne de ϕ est définie par

$$D_x\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}, \text{ pour } x \in O,$$

son déterminant $\det D_x\phi$ est appelé jacobien.

Theoreme 9

Soit $f : O' \mapsto \mathbb{R}$, mesurable, alors

$$f \textit{ est intégrable } \Leftrightarrow f \circ \phi(.) \times \textit{ est intégrable}$$

et dans ce cas

$$\int_{O'} f(y) d\lambda(y) = \int_O f(\phi(x)) \times |\det D_x\phi| \, d\lambda(x).$$

Exemple 7 (Intégrale de Gauss)

Soit

$$f(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = I^2,$$

avec $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}\lambda(x)$. On effectue le changement de variable en coordonnées polaires $\phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec

$$\det D_{r,\theta} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Par application de la formule de changement de variable il vient

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}_+\times]0,2\pi[} re^{-r^2/2}\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(r,\theta) = 2\pi\int_{\mathbb{R}_+} re^{-r^2/2}\mathrm{d}\lambda(r) = 2\pi$$

puis $I = \sqrt{2\pi}$.

VIII. Intégrale d'une fonction à valeur complexe

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexe, on a

$$f(\omega) = \Re(f)(\omega) + i\Im(f)(\omega), \ \omega \in \Omega.$$

où les parties réelles et imaginaires de f sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'espace mesurable $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$ est de même nature que $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2})$.

Definition 9

1. f est mesurable Ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables.
2. f est dite intégrable Ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables et

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int \Re(f) \mathrm{d}\mu + i \int \Im(f) \mathrm{d}\mu.$$

Le module de f est défini par

$$|f| = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}.$$

Proposition 9

$|f|$ est intégrable Ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables.

La plupart des théorèmes énoncés pour les fonctions réelles sont valides pour les fonctions à valeur complexe, on les démontre en considérant séparément la partie imaginaire et la partie réelle.

Theoreme 10 (Convergence dominée pour les fonctions à valeurs complexes)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables complexes convergeant presque partout vers* f*, et telle qu'il existe* g *intégrable vérifiant, pour tout* n*,* $|f_n| \leq g$ *alors*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

preuve:

Comme $|\Re(f_n)| \leq |f_n| \leq g$, on applique alors le théorème de convergence dominée à $(\Re(f_n))_n$. Idem pour $(\Im(f_n))_n$

$\square$

Bibliographie

Mes notes se basent sur les ouvrages suivants [1, 3, 2, 4]

Philippe Barbe and Michel Ledoux.
Probabilité.
L'Editeur: EDP Sciences, 2007.

Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin.
Mesure, intégration, probabilités.
Ellipses, `https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/637007/filename/mes-int-pro.pdf`, 2013.

Jacques Gapaillard.
Intégration pour la licence: cours avec exercices corrigés.
Masson, 1997.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.