PLANCHE D'EXERCICES

Intégration L3– 2018
Pierre-O Goffard

---

1. [1, Exercice 8]. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$

   (a) Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

   Solution: On a $\mu(\emptyset) = 0$ et pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient

   $$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mu_n\left(A_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n\left(A_k\right), \text{ inversion double somme de série à terme positif.}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mu\left(A_k\right).\end{aligned}$$

   (b) On suppose que les μ_n sont des mesures de probabilités, et soit $(p_n)_n \in \mathbb{N}$ une suiste de réels positifs tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$. On pose

   $$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\mu_n(A),\ \forall A \in \mathcal{A}.$$

   Montrer que μ est une mesure de probabilité.

   Solution: $\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\mu_n(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$

   (c) Application: On considère les mesures

   $$\mu_1 = \sum_{p=1}^{+\infty}\delta_p, \text{ et } \mu_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} p\delta_p.$$

   Calculer pour chacune de ces mesures la mesure des ensembles suivants:

   $$A_n = [n, n+1+1/n^2],\ B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p,\ B = \bigcup_{p=1}^{+\infty} A_p,\ C_n = \bigcap_{p=1}^{n} A_p,\ \text{et } C = \bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p$$

   pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution: On a

- $\mu_1(A_1) = 3$ et $\mu_1(A_n) = 2,\ n \geq 2$, et $\mu_2(A_1) = 6$ et $\mu_2(A_n) = 2n+1,\ n \geq 2$.
- $\mu_1(B_1) = 3$ et $\mu_1(B_n) = n+1,\ n \geq 2$, et $\mu_2(B_1) = 6$ et $\mu_2(B_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. On a également $\mu_1(B) = +\infty$ et $\mu_2(B) = \infty$
- $\mu_1(C_1) = 3,\ \mu_1(C_2) = 2,\ \mu_1(C_3) = 1$ et $\mu_1(C_n) = 0\ n \geq 4$, et $\mu_2(C_1) = 6\ \mu_2(C_2) = 5,\ \mu_2(C_3) = 3$ et $\mu_2(C_n) = 0\ n \geq 4$. On a également $\mu_1(C) = 0$ et $\mu_2(B) = 0$

2. [1, Section 4.7.3] On note Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,\ x \in]0, +\infty[$$

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \geq 1.$$

(a) Vérifier que Γ est bien définie.

Solution: $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$, avec $x > 0$, est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable. Comme $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ lorsque $t \to 0$ alors $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable en 0 puisque $1 - x < 1$. Comme $t^2e^{-t}t^{x-1} \to 0$ alors $e^{-t}t^{x-1} = o(1/t^2)$ et est intégrable au voisinage de $+\infty$. Voir les critères d'intégrabilité de Riemann

(b) Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Solution: $f : (t, x) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est dérivable sur sur $]0, +\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$. On a, pour $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= e^{-t}t^{x-1}(-\ln(t))\mathbb{I}_{]0,1[} + e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\mathbb{I}_{]1,+\infty[} \\ &\leq e^{-t}t^{a-1}(-\ln(t))\mathbb{I}_{]0,1[} + e^{-t}t^{b-1}\ln(t)\mathbb{I}_{]1,+\infty[}.\end{aligned}$$

La fonction ci-dessus est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable.

- Au voisinage de 0, on a $\ln(t) = o(t^{a/2})$ puis $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = o(t^{a/2-1})$ et donc intégrabilité.
- Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(t) = o(t)$ et $t^b = o(e^{t/2})$. Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = o(e^{-t/2})$, d'où l'intégrabilité.

On peut donc appliquer le résultat de dérivabilité sous le signe intégrale pour les intégrales dépendant d'un paramètre, ce qui donne

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que la suite

$$u_n = H_n - \log(n),\ n \geq 1$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, ausi appelée constante d'Euler.

Solution: On a

$$|u_n - u_{n-1}| = |1/n - \ln(n) + \ln(n-1)| = |1/n + \ln(1-1/n)| = O(1/n^2),\ n \geq 2$$

. La série $\sum_{k=2}^{+\infty} |u_k - u_{k-1}|$ converge or $\sum_{k=2}^{n} |u_k - u_{k-1}| = u_n - u_1$, d'où la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) montrer que

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\mathrm{d}v,\ n \geq 1.$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} u^k \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}u = H_n.
\end{aligned}$$

(e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log(v)\mathrm{d}v.$$

Solution: D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\frac{H_{n+1}}{n+1} &= \frac{1}{n+1}\int \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}\mathrm{d}v \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{n+1}\left\{0 - \lim_{v\to 0}[1-(1-v)^{n+1}]\ln(v) - \int_0^1 (n+1)\ln(t)(1-v)^n \mathrm{d}v\right\} \\
&= -\int_0^1 \ln(t)(1-v)^n \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

(f) Etablir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.

Solution: Etudier la fonction $t \mapsto 1 - t - e^{-t}$.

(g) On pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Solution: On pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathbb{I}_{[0,n]}(t)$ qui converge vers $e^{-t}\ln(t)$. De plus, on a, d'après la question précédente $|f_n(t)| \leq e^{-t}\ln(t)$. On applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

(h) Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
<u>Indication:</u> On pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log(n) - H_{n+1})$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-v)^n \ln(nv) n\mathrm{d}v \\ &= n\int_0^1 (1-v)^n (\ln(n) + \ln(v))\mathrm{d}v \\ &= n\ln(n)\int_0^1 u^n \mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-v)^n \ln(v)\mathrm{d}v \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right). \end{aligned}$$

On a $u_n \sim -I_n$ puis $\gamma = -\lim I_n = -\Gamma'(1)$.

3. [1, Exercices 25, 26, 27], Evaluation de l'intégrale de Gauss et de la fonction gamma par les intégrales de Wallis.

(a) L'intégrale de Wallis est définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$, pour $n \geq 2$. En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante qu'on explicitera.

Solution:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\cos^{n-1}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\overset{IPP}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\cos^{n-2}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= (n-1)[W_{n-2} - W_n], \end{aligned}$$

puis $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$ après ré-arrangement. On note ensuite que $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$. la suite (nW_nW_{n-1}) égale a $W_1W_0 = \pi/2$.

(b) Montrer que

$$W_nW_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_nW_{n-1}.$$

En déduire l'équivalent en l'infini $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solution: On a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \cos^{n+1}(\theta) \leq \quad & \cos^n(\theta) & \leq \cos^{n-1}(\theta) \\ W_{n+1} \leq \quad & W_n & \leq W_{n-1} \\ W_{n+1}W_n \leq \quad & W_n^2 & \leq W_n W_{n-1} \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\frac{n}{n+1}(n+1)W_{n+1}W_n \leq nW_n^2 \leq nW_nW_{n-1}.$$

Ce qui implique que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(c) On pose

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Solution: Soit $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{I}_{[0, \sqrt{n}]}$ qui converge $t \mapsto e^{-t^2}$. De plus $|f_n(t)| < e^{-t^2}$, on applique le théorème de convergence dominé pour obtenir

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

(d) Exprimer J_n en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}$$

Solution: On note d'abord que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, puis

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) \mathrm{d}\theta \\ &\to \sqrt{\pi}/2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}.$$

(e) Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que

$$\Gamma(1/2) = \pi$$

Solution:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

References

[1] Olivier Garet and Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*, volume 470. Ellipses, 2011.