Modèles aléatoires discrets

Chapitre I: Introduction

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 8, 2020

I. Introduction et motivations

Objectif

Introduire la notion de processus stochastique.

- Chaine de Markov
- Processus de Poisson
- Processus de Poisson composé
- Processus de branchement
- Martingale à temps discret

Definition 1 (Processus stochastique)

Un processus stochastique $\{X_t\ ;\ t\}$ est une suite de variables aléatoires indicée sur le temps.

- Si $t \in \mathbb{N}$ alors on parle de processus stochastique en temps discret.
- Si $t \in \mathbb{R}_+$ alors on parle de processus stochastique en temps continu.

$\{X_t\ ;\ t\}$ est une quantité qui évolue de façon aléatoire dans le temps.

Example 1 (Modèle de ruine à temps discret)

Soit une compagnie d'assurance non-vie,

- detenant un capital initial $u > 0$,
- récupérant $c > 0$ sur chaque période d'exercice au titre des primes,
- indemnisant X, variable aléatoire positive, à ses assurés sur chaque période d'exercice.

Soit $\{R_t \ ; \ t \in \mathbb{N}\}$ la valeur de la réserve financière à la fin de chaque période d'exercice. On a

$$R_0 = u \text{ et } R_t = u + c \times t - \sum_{k=1}^{t} X_k, \ t = 1, 2, 3, \ldots$$

où $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires i.i.d. positives distribuées comme X. On s'intéresse à la probabilité de ruine avant T définit par

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(R_t < 0, \text{ pour un certain } t \leq T)$$

- Calibrer $c \Rightarrow$ tarification, typiquement

  $$c = \mathbb{E}(X)(1 + \eta),$$

  avec un chargement de sécurité $\eta > 0$.
- Calibrer $u \Rightarrow$ provisionnement. Choisir u grand permet d'éviter une ruine à court terme.

Example 2 (Le cours de l'action Amazon)

Soit $\{X_t \; ; \; t \in \mathbb{N}\}$ la valeur journalière de l'action Amazon à la clotûre du marché. On suppose que le cours de l'action

- augmente de $\alpha\%$ avec probabilité p
- diminue de $\beta\%$ avec probabilité $1-p$

Soit N le nombre de jour d'augmentation, à l'instant t, l'action vaut

$$X_t = (1+\alpha)^N (1-\beta)^{t-N} X_0$$

Quelle est la loi de N en fonction de t et p?
On peut raffiner le modèle en supposant q'une augmentation est plus probable si une augmentation est observée le jour d'avant.
On définit le processus $\{Y_t \; ; \; t \in \mathbb{N}\}$ indiquant si le cours de l'action augmente ou diminue.

- L'espace d'état (valeur possibles de Y_t) est $E = \{\text{up}, \text{down}\}$
- On a, pour $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{t+1} = \text{ up}|Y_t = \text{ up}) = p & \mathbb{P}(Y_{t+1} = \text{ down}|Y_t = \text{ up}) = 1-p \\ \mathbb{P}(Y_{t+1} = \text{ up}|Y_t = \text{ down}) = 1-q & \mathbb{P}(Y_{t+1} = \text{ down}|Y_t = \text{ down}) = q \end{pmatrix}$$

Lorsque l'état du processus ne dépend que de la valeur précédente, on parle de processus de Markov. $\{Y_t \; ; \; t \in \mathbb{N}\}$ définit une chaine de Markov. On parle de chaine de Markov cachée influençant la valeur du processus X_t. Déssiner le graphe de transition.

Example 3 (Le modèle SIR)

Soit une population de N individus placés dans 3 compartiments

- Compartiment **S** pour *Susceptibles*
- Compartiment **I** pour *Infected*
- Compartiment **R** pour *Removed*

On modélise le nombre d'individus dans chaque compartiment au cours du temps via les processus S_t, I_t et $R_t = N-(S_t+I_t)$. Le modèle évolue selon deux règles, durant chaque période,

- Chaque infecté contamine un susceptible donné avec une probabilité p
- Les infectés vont dans le compartiment **R**

Chaque susceptible est contaminé durant une période donnée avec une probabilité $1-(1-p)^{I_t}$, le nombre de susceptible S_{t+1} à $t+1$ dépend du nombre de susceptibes S_t et du nombre d'infecté I_t à l'instant t avec

$$S_{t+1} \sim \mathrm{Bin}(S_t, (1-p)^{I_t})$$

L'épidémie s'arrête à T lorsque le nombre d'infectés est 0 ($I_T = 0$), on s'intéresse à la taille finale de l'épidémie donnée par $N - S_T$, soit combien de susceptible ont été contaminé. On a une fois de plus un processus (S_t, I_t) avec une dépendance à l'état précédent, donc Markovien.