

Problèmes

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer l'expression analytique de la fonction de survie d'une distribution composée géométrique. Dans le cadre de cet exercice, on s'intéresse à la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^N U_i,$$

où

- N est une variable de comptage caractérisée par $p_k = P(N = k)$ avec $k \in \mathbb{N}$,
 - $(U_i)_{i \geq 0}$ suite de variables i.i.d. positives indépendantes de N et caractérisées par F_U .
1. Donner la fonction génératrice des moments de S , $\widehat{m}_S(s) = E(e^{sS})$ en fonction de la fonction génératrice des moments de U et de la fonction génératrice des probabilité de N , $G_N(s) = E(s^N)$
 2. Donner l'espérance et la variance de S .

Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer que seules la loi de Poisson, la loi Binomiale et la loi Binomiale Négative vérifient la relation de récurrence de Panjer.

1. Montrer que si N vérifie

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1},$$

et que $a = 0$, alors N suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

2. Soit $N \sim \text{NegBin}(\alpha, p)$, telle que $P(N = k) = \binom{\alpha+k-1}{k} (1-q)^\alpha q^k$, avec $0 < q < 1$ et $\alpha > 0$. Donner l'espérance mathématique et la variance de N .
3. Comment interpréter cette distribution à partir d'une expérience dont la probabilité de succès est notée q ?
4. Quelle distribution obtient on pour $\alpha = 1$?

5. Montrer que pour $\alpha \neq 0$ on a

$$p_k = p_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha + i),$$

pour un certain α à préciser.

6. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} a^k (1 - a)^\alpha$$

7. En déduire suivant le signe de a la distribution de N .

8. Conclure sur les distributions appartenant à la famille de Panjer.

9. A partir d'une suite d'observation du nombre de sinistres sur des exercices successifs, vous constatez que la variance empirique est bien plus grande que la moyenne empirique. Quelle distribution de la famille de Panjer choisiriez vous pour modéliser le nombre de sinistres?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de parvenir à la relation de récurrence sur laquelle est basée l'algorithme de Panjer. Dans le cadre de cet exercice, on s'intéresse à la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^N U_i,$$

où

- N est une variable de comptage caractérisée par $p_k = P(N = k)$ vérifiant la relation de récurrence de Panjer,
- $(U_i)_{i \geq 0}$ suite de variables i.i.d. à valeurs entières indépendantes de N et caractérisées par $q_k = P(U = k)$.

1. Montrer que pour $j, k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E \left(U_1 \mid \sum_{k=1}^n U_k = j \right) = \frac{j}{n}.$$

2. Soit $q_j^{*(n)} = P(U_1 + \dots + U_n = j)$. Montrer que pour $k, j \in \mathbb{N}$,

$$P \left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}},$$

3. Donner $p_0^S = P(S = 0)$ en fonction de la fonction génératrice des probabilités de N et de q_0 .

4. En utilisant les questions précédentes montrer, la relation de l'algorithme de Panjer

$$P(S = j) = p_j^S = (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k p_{j-k}^S, \quad j > 0.$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer l'expression analytique de la fonction de survie d'une distribution composée géométrique. Dans le cadre de cet exercice, on s'intéresse à la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^N U_i,$$

où

- N est une variable de comptage caractérisée par $p_k = P(N = k) = (1 - p)p^k$ avec $k \in \mathbb{N}$,
- $(U_i)_{i \geq 0}$ suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre δ indépendantes de N et caractérisées par $F_U(x) = 1 - e^{-\delta x}$.

Calculer $\overline{F_S}$.

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est de donner l'expression analytique de la probabilité de ruine ultime dans le cas où les sinistres sont distribués selon une loi hyperexponentielle. On suppose que l'intensité du processus de Poisson est donnée par $\beta = 3$ et qu les primes reçues par la compagnie d'assurance par unité de temps sont égales à $p = 1$. La loi des sinistres admet une densité de la forme:

$$f_U(x) = \left(\frac{1}{2} 3e^{-3x} + \frac{1}{2} 7e^{-7x} \right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Cette loi admet une représentation *Phase-Type* de la forme (E, α, \mathbf{T}) .

1. Donner le nombre d'états de E , le vecteur α et le générateur A du processus de Markov sous-jacent.
2. Donner $\alpha'_+ = -\beta\alpha'\mathbf{T}^{-1}$ et $Q = \mathbf{T} + \mathbf{t}\alpha'$
3. Donner $e^{\mathbf{Q}t}$.
On rappelle que:
Si $Q \in M_2(\mathbb{R})$ alors $\chi_{\mathbf{Q}}(x) = x^2 - \text{tr}(\mathbf{Q})x + \det(\mathbf{Q})$. De plus

$$e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} \mathbf{h}_i \mathbf{v}'_i$$

où

- λ_i est la i^{eme} valeur propre de \mathbf{Q}
- $\nu'_i \mathbf{Q} = \lambda_i \nu'_i$
- $\mathbf{Q} \mathbf{h}_i = \lambda_i \mathbf{h}_i$
- $\nu'_i \cdot \mathbf{h}_i = 1$

4. Donner la probabilité de ruine $\psi(u) = \alpha'_+ e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{1}_2$