

---

# Introduction à la théorie de la ruine

---

Pierre-Olivier GOFFARD\*

\*Institut de mathématique de Luminy et Axa France  
*pierre.olivier.goffard@gmail.com*  
*pierreolivier.goffard@axa.fr*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
I	Qu'est ce que la théorie de la ruine? . . . . .	2
II	Modèle individuel et modèle collectif . . . . .	3
II.1	Le modèle individuel . . . . .	3
II.2	Le modèle collectif . . . . .	3
III	La base de la théorie de la ruine . . . . .	4
III.1	Processus de réserve et de surplus . . . . .	4
III.2	Probabilité de ruine . . . . .	4
III.3	Le chargement de sécurité . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Distributions composés</b>	<b>7</b>
I	Quelques rappels . . . . .	7
II	Distribution du nombre de sinistres . . . . .	8
II.1	Famille de Panjer . . . . .	9
II.2	Algorithme de Panger . . . . .	10
III	Distribution pour les montants . . . . .	12
III.1	Loi Exponentielle . . . . .	13
III.2	Loi <i>Phase-type</i> . . . . .	13
IV	Géométrique composée . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modèle de Cramer Lundberg</b>	<b>22</b>
I	Définition du modèle . . . . .	22
II	Rappel sur le processus de Poisson . . . . .	22
III	Probabilité de ruine ultime . . . . .	25
IV	Probabilité de ruine à horizon fini . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Perspective et utilité de la théorie de la ruine</b>	<b>32</b>
I	Le lien entre la théorie et la réalité . . . . .	33
II	Le jeu des hypothèses . . . . .	34

# Chapitre 1

## Introduction

### I Qu'est ce que la théorie de la ruine ?

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance.

Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance. Assurance de type IARD (Incendie, Accidents et Risques Divers).

L'objectif est de définir un cadre permettant la bonne gestion d'un portefeuille de contrat. On imagine une compagnie d'assurance qui se lance sur un nouveau marché, la business line doit être

- Viable, la compagnie doit être solvable à tout instant (la réserve ne doit pas tomber en dessous de 0). Elle doit être en mesure de faire face aux engagements qu'elle a pris vis à vis des assurés par voie contractuelle
- Rentable, la tarification doit permettre à l'assureur d'engranger des bénéfices pour rémunérer les actionnaires et les employés.

La gestion comptable est rendue difficile à cause de l'inversion du cycle de production. La compagnie reçoit les primes avant de verser des prestations. Elle doit mettre du cash de côté, c'est ce qu'on appelle le provisionnement. Cela nécessite une évaluation des risques dans un univers aléatoire, d'où l'intervention de statisticiens et de probabilistes.

Cela passe par la définition de deux paramètres :

- Un niveau de capital initial
- Une tarification

Une attention particulière est accordée à la réserve de capital initiale.

#### **Pourquoi ?**

→ Prime généralement fixé par un niveau lié aux marchés. L'assureur n'a pas forcément beaucoup de marge de manoeuvre à ce niveau là. Les compagnies d'assurance s'intéressent énormément aux comportements des assurés par rapport aux prix. La sensibilité au prix porte le nom d'élasticité prix. Elle est basée sur l'hypothèse que les assurés sont des agents économiques rationnels qui tentent de maximiser une fonction d'utilité. Il est très difficile de modéliser ce comportement, des travaux de recherche sont effectués mêlant théorie des jeux et théorie de la ruine.

Ces deux quantités sont fonction de l'appréhension de l'assureur vis à vis du risque supporté par son portefeuille. L'analyse statistique permet de calibrer :

- Une loi pour les montants des sinistres
- Une loi pour le nombre de sinistres

A noter que l'analyse statistique nécessite des données qui sont parfois de mauvaise qualité, voire insuffisantes. Il est nécessaire de détenir un historique assez long pour faire de l'inférence. Il est possible de faire appel à des experts en matière de sinistralité, avec une certaine expérience pratique. Par exemple, on observe que lorsque qu'on propose aux agents généraux un interressement sur la marge technique expliquée par une faible sinistralité des assurés, ils pratiquent une sélection qui s'avère efficace.

L'hypothèse sous jacente est celle d'un portefeuille homogène dans lequel les montants de sinistres sont **i.i.d.** L'autre hypothèse est celle d'un modèle collectif quant à la modélisation de la charge totale générée par les sinistres

La modélisation de la charge totale induite par les sinistres impactant un portefeuille de contrats d'assurance sur une période de temps donnée (souvent 1 an) permet de mettre au point la tarification mais aussi de définir le niveau de provision requis pour faire face aux engagements pris par rapport aux assurés. L'étude de sa distribution donne accès à ces quantiles pouvant être vue comme des *Value-at-Risk*.

## II Modèle individuel et modèle collectif

### II.1 Le modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant  $n$  contrats est définie par :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n I_i U_i$$

Avec,

- $I_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(p)$  indiquant si l'assuré  $i$  a subit un sinistre sur la période donnée.
- $U_i$  v.a. positive indépendante de  $I_i$ , montant de l'ensemble des sinistres subit par l'assuré  $i$  sur l'exercice.

Les calculs sont difficiles a effectuer lorsque le nombre de contrats augmente.

### II.2 Le modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subit par un portefeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré confondu, la charge totale est définie par :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^N U_i$$

Avec,

- $N$  v.a. discrète à valeur entière
- $U_i$  v.a. positive i.i.d. indépendante de  $N$

Lorsque le nombre de contrats est important et que le portefeuille est homogène on peut approximer le modèle individuel par un modèle collectif.

$$S^{Ind} \sim S^{Col}$$

Le modèle individuel peut s'écrire comme un modèle collectif

**Lequel ?**

→  $S^{ind} = \sum_{i=0}^N U_i$ , où  $N$  est loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .  $n$  étant le nombre de contrats en portefeuille.

**Par quel loi peut-on approximer la loi binomial ?**

→ Une loi de Poisson si  $p$  petit et  $n$  grand. Convergence en loi d'une  $Bin(n, p_n)$  vers  $Pois(a)$  si  $p_n n \rightarrow a$  et  $p_n \rightarrow 0$ .

**Démonstration :** On écrit la  $P(N=k)$  pour  $N$  binomial ou on passe par la fonction génératrice. On passe ensuite à la limite.

La description des modèles collectif et individuel se trouve Section 4.1 dans [2].

## III La base de la théorie de la ruine

### III.1 Processus de réserve et de surplus

On note  $\{R_t : t \geq 0\}$  le processus de réserve, et  $u = R(0)$  la réserve initiale. On fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suite de v.a. positives i.i.d. égales aux temps inter-arrivée des sinistres,
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$  instant d'occurrence du  $i^{eme}$  sinistre,
- $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_{n+1} \geq t\}$  processus de comptage égal au nombre de sinistres jusqu'au temps  $t$ ,
- $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suite de v.a. positives i.i.d. égales aux montants des sinistres,
- $p$  flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.

Ce qui donne :

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

On définit également le processus de surplus  $\{S(t) : t \geq 0\}$  :

$$S_t = u - R_t$$

### III.2 Probabilité de ruine

**Definition 1.III.1 :** La probabilité de ruine ultime ou probabilité de ruine à horizon de temps infini, notée  $\psi$ , est définie par

$$\psi(u) = P \left( \inf_{t \geq 0} R_t < 0 : R_0 = u \right).$$

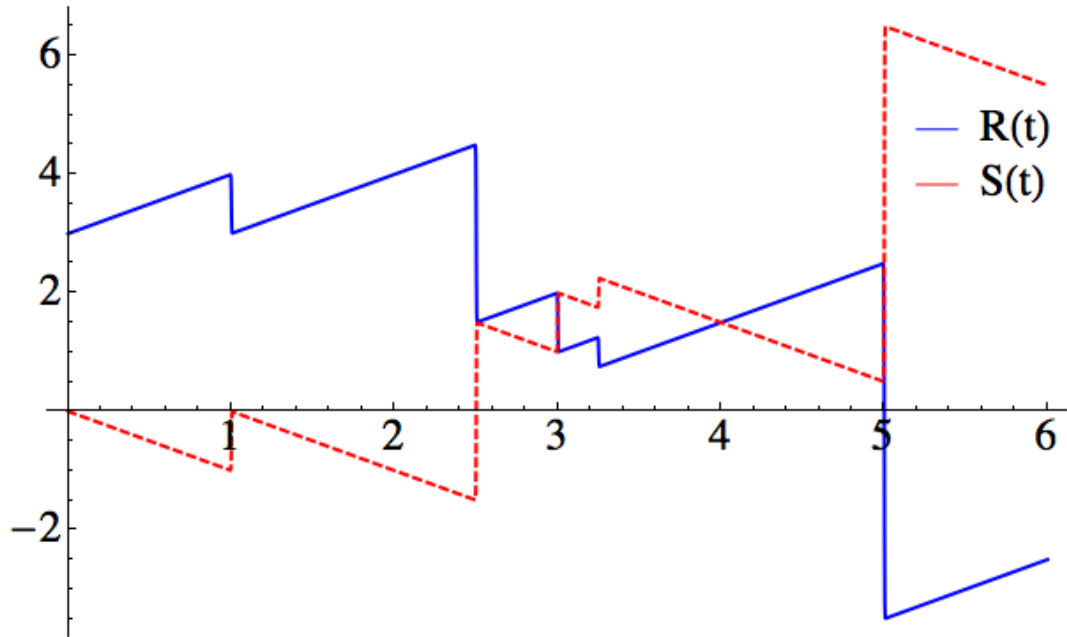


FIGURE 1 – Evolution du processus de réserve et de surplus au cours du temps

**Definition 1.III.2 :** La probabilité de ruine avant l'instant  $T$  ou probabilité de ruine à horizon de temps fini est définie par

$$\psi(u, T) = P \left( \inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u \right).$$

**Definition 1.III.3 :** La probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine, notée  $\phi$ , est définie par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T).$$

**Definition 1.III.4 :** L'instant de ruine, noté  $\tau_u$ , associé à une réserve initiale  $u$ , est défini par

$$\tau_u = \inf \{ t \geq 0 : R(t) < 0 \} = \inf \{ t \geq 0 : S(t) > u \}.$$

**Definition 1.III.5 :** Les maxima du processus de surplus en temps fini et infini, respectivement notés  $M_T$  et  $M$ , sont définis par

$$M = \sup_{t \geq 0} S(t) \quad M_T = \sup_{t \in [0, T]} S(t).$$

La définition de ces deux quantités permettent des définitions alternatives de la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = \psi(M > u) \quad \psi(u, T) = P(\tau(u) < T) = \psi(M_T > u).$$

### III.3 Le chargement de sécurité

Typiquement, dans les modèles de ruine, l'existence d'une quantité tel que

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_t} U_k \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \rho \quad (1.1)$$

est supposée.  $\rho$  correspond pratiquement ala charge moyenne par unité de temps.

**Definition 1.III.6 :** Le chargement de sécurité, noté  $\eta$ , est défini par

$$p = (1 + \eta)\rho.$$

Il est exprimé en pourcentage et exprime en quel proportion la prime excède la charge moyenne générée par unité de temps.

**Proposition 1.III.1 :** En supposant que (1.1) est vérifié alors :

- Si  $\eta > 0$  alors  $M = \infty$  ce qui implique  $\psi(u) = 1$  presque surement  $\forall u$ .
- Si  $\eta < 0$  alors  $M < \infty$  ce qui implique  $\psi(u) < 1$  presque surement pour  $u$  suffisamment grand.

**Preuve :**

$$\frac{S(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \rho - p$$

Si  $\eta < 0$  alors  $\rho - p > 0$  et  $M = \infty$ .

□

On peut se référer au premier chapitre de [1] en ce qui concerne la définition du modèle de ruine et des probabilités de ruine. **Quelle valeur pour  $\eta$  ?**

→ Tout dépend de la stratégie de la compagnie d'assurance, des concurrents , de la sélection des assurés. Lorsque l'on est une compagnie très reconnue, on pratique des tarifs plus élevés en garantissant un service de meilleur qualité, avec une belle campagne marketing pouvant cibler des clients haut de gamme. Des tarifs élevés peuvent aussi rassurer les assurés, qui suspecterons une arnaque dans une trop belle affaire. Lorsqu'on est un nouvel arrivant ou que l'on veut conquérir un nouveau marché le levier principal demeure le tarif qui doit être plus bas que celui de la concurrence afin d'attirer les clients, il s'agit la d'une stratégie offensive et plus risquée. Axa utilise par exemple sa filiale Direct Assurance pour proposer des tarifs attractifs sans tarir son image de marque (ne pas devenir une compagnie d'assurance "cheap").

# Chapitre 2

## Distributions composés

### I Quelques rappels

On dit qu'une variable aléatoire  $S$  suit une distribution composée si elle est de la forme

$$S = \sum_{i=1}^N U_i,$$

où

- $N$  est une variable de comptage avec  $p_n = P(N = n)$ ,
- $(U_i)_{i \geq 0}$  suite de variables positives i.i.d. indépendantes de  $N$  et de fonction de répartition  $F_U$ ,
- $S = 0$  si  $N = 0$  par convention.

Cette variable aléatoire représente la charge totale engendrée par des sinistres dans le cadre des modèles collectifs.

**Quelle est la densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes ?**

→ Le produit de convolution des deux densités, défini par

$$f_{U_1+U_2}(x) = \int_0^x f_{U_1}(y) f_{U_2}(x-y) dy.$$

**Donnez la f.d.r. de  $S$**

La fonction de répartition de  $S$  est obtenue en conditionnant par le nombre de sinistres :

$$F_S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n F_U^{*n}(x)$$

$F_U^{*n}$  est la fonction  $F_U$  convoluée  $n$  fois avec elle-même.

**Donnez la fonction génératrice des moments de  $S$  en fonction de la fonction génératrice des probabilités de  $N$  et de la fonction génératrice des moments de  $U$ .**

**Proposition 2.I.1 :**



$$\widehat{m}_S(s) = E(e^{sS}) = \int_0^{+\infty} e^{sx} dF_S(x) = G_N(\widehat{m}_U(s))$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} E(e^{sS}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E(e^{\sum_{i=1}^n U_i} | N = n) p_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E\left(\prod_{i=1}^n e^{U_i} | N = n\right) p_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^n E(e^{U_i} | N = n) p_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E(e^U)^n p_n \\ &= G_N(\widehat{F}_U(s)) \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.I.2 :**

L'espérance mathématique de  $S$  est donnée par

$$E(S) = E(N).E(U).$$

La variance est donnée par

$$Var(S) = E(N)Var(U) + E(U)^2Var(N).$$

**Preuve**

$$E(S) = E(E(S|N)) = E(NE(U)) = E(N)E(U)$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= E(Var(S|N)) + Var(E(S|N)) \\ &= E(N.Var(U)) + Var(N.E(U)) \\ &= E(N)Var(U) + E(U)^2Var(N) \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir ce résultat en évaluant les dérivées de la fonction génératrice des moments en 0.

## II Distribution du nombre de sinistres

Dans cette section, le nombre de sinistres sur une période de temps donnée est supposé distribué selon une loi de Poisson, une loi Binomiale ou une loi Binomiale négative. Il est démontré dans la première sous section que ces trois lois appartiennent à la famille de Panjer, caractérisée par l'existence d'une relation de récurrence particulière entre leur masses de probabilité. La deuxième section présente une méthode itérative, l'algorithme de Panjer, pour calculer exactement la fonction de répartition d'une distribution composée lorsque les sinistres sont à valeur dans  $\mathbb{N}$ .

## II.1 Famille de Panjer

Le nombre de sinistres sur un exercice est modélisé par une variable aléatoire discrète à valeur entière, notée  $N$ . Parmi les distributions de  $N$  possibles, on s'intéresse à celles dont les masses de probabilités vérifient la relation de récurrence

$$\exists a < 1, b \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}. \quad (2.1)$$

**Définition 2.II.1 :**

- $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  S.s.i.

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

- $N$  suit une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $q \in [0, 1]$  S.s.i.

$$\forall 0 \leq k \leq n, p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$$

La loi de Bernoulli correspond au cas  $n = 1$ .

- $N$  suit une loi Binomiale Négative de paramètres  $\alpha > 0$  et  $q \in [0, 1]$  S.s.i.

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} q^k (1-q)^\alpha.$$

La loi géométrique correspond au cas  $\alpha = 1$ .

**Proposition 2.II.1 :**

Une variable aléatoire de comptage, notée  $N$ , dont les masses de probabilités sont liées par la relation de récurrence (2.1) suit une loi de Poisson, une loi Binomiale ou une loi Binomiale Négative. Plus précisément :

- Si  $a = 0$ , alors  $b = \lambda > 0$ , et  $N \sim Pois(\lambda)$
- Si  $0 < a < 1$ , alors  $a + b > 0$ , et  $N \sim NegBin(\alpha, q)$  avec  $q = a$  et  $\alpha = 1 + bq^{-1}$
- Si  $a < 0$ , alors  $\exists n \in \mathbb{N}$ , tel que  $b = -a(n + 1)$ , alors  $N \sim Bin(n, q)$  avec  $q = a(a - 1)^{-1}$  et  $n = -1 + ba^{-1}$

**Preuve :**

Cas  $a = 0$  :

(2.1) s'écrit

$$p_k = \frac{b}{k} p_{k-1} = \frac{b^k}{k!} p_0$$

avec  $b > 0$  pour garantir la positivité des probabilités. La condition  $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$  implique que  $b = e^{-b}$  et  $N \sim Pois(b)$ .

Cas  $a \neq 0$  :

(2.1) s'écrit

$$\begin{aligned} p_k &= (\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \dots (\alpha + 1) \alpha \frac{a^k}{k!} p_0 \\ &= \binom{\alpha + k - 1}{k} a^k p_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec  $\alpha = ba^{-1} + 1$ , la condition  $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$  implique :

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} a^k (1 - a)^\alpha$$

si  $0 < a < 1$  et  $\alpha > 0$  alors  $N \sim \text{NegBin}(\alpha, a)$ .

Pour  $a < 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $b = -a(n + 1)$  sans quoi les probabilités  $p_k$  deviendraient négatives à partir d'un certain rang (ici elle deviennent nulles),  $\alpha = -n$ . En repartant de (2.2), il vient

$$\begin{aligned} p_k &= (-n + k - 1)(-n + k - 2) \dots (-n + 1)(-n) \frac{a^k}{k!} p_0 \\ &= n(n - 1) \dots (n - k + 2)(n - k + 1)(-1)^k \frac{a^k}{k!} p_0 \\ &= \binom{n}{k} (-a)^k p_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La condition  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$  implique que  $p_0 = (1 - a)^{-n}$ . En injectant dans (2.3), il vient

$$\begin{aligned} p_k &= \binom{n}{k} \frac{(-a)^k}{k!} (1 - a)^{-n} \\ &= \binom{n}{k} \left( \frac{a}{a - 1} \right)^k \left( 1 - \frac{a}{a - 1} \right)^{n - k}, \end{aligned}$$

et  $N \sim \text{Bin}(n, a/a - 1)$

□

## II.2 Algorithme de Panger

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^N U_i,$$

où

- $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suite de variables aléatoires discrètes à valeurs entières i.i.d. de loi  $P(U = k) = q_k$ ,
- $N$  variable aléatoire discrète à valeurs entières indépendante des  $U_i$ .

L'algorithme de Panger est une méthode itérative permettant l'évaluation de  $p_j^S = P(S = j)$ .

**Proposition 2.II.2 :**

$\forall j, k, n \in \mathbb{N}$

$$E \left( U_1 \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) = \frac{j}{n},$$

et

$$P\left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}},$$

où  $\{q_k^{*n}\}$  est la  $n^{\text{eme}}$  convolution de de  $\{q_k\}$

**Preuve :**

Comme les  $U_i$  sont identiquement distribuées alors :

$$nE\left(U_1 \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) = \sum_{k=1}^n E\left(U_k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) = j$$

De plus les  $U_i$  sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} P\left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) &= \frac{P(U_1 = k, \sum_{i=2}^n U_i = j - k)}{P(\sum_{i=1}^n U_i = j)} \\ &= \frac{P(U_1 = k) P(\sum_{i=2}^n U_i = j - k)}{P(\sum_{i=1}^n U_i = j)} \\ &= \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.II.1 :**

$$p_j^S = \begin{cases} G_N(q_0), & j = 0 \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k p_{j-k}^S, & j > 0 \end{cases}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} p_0^S &= P\left(\sum_{i=1}^N U_i = 0\right) \\ &= p_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P\left(\sum_{i=1}^n U_i = 0 \mid N = n\right) p_n \\ &= p_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(\cap_{i=1}^n \{U_i = 0\} \mid N = n) p_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} q_0^n p_n \\ &= G_N(q_0) \end{aligned}$$

Pour  $j \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
p_j^S &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n q_j^{*n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} q_j^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a + \frac{b}{j} E \left( U_1 \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) \right) p_{n-1} q_j^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a + \frac{b}{j} \sum_{k=0}^j k P \left( U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) \right) p_{n-1} q_j^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) P \left( U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) p_{n-1} q_j^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) q^k p_{n-1} q_{j-k}^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) q_k \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} q_{j-k}^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) q_k p_{j-k}^S \\
&= a q_0 p_j^S + \sum_{k=1}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) q_k p_{j-k}^S \\
&= (1 - a q_0)^{-1} \sum_{k=1}^j \left( a + \frac{b}{j} k \right) q_k p_{j-k}^S
\end{aligned}$$

□

Comment fait on si les  $U_i$  sont des variables aléatoires continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ?  
→ Discrétisation de la loi.

### III Distribution pour les montants

En actuariat, on distingue deux types de distributions associées à deux types de risque. On parle de distributions à queue légère (Exponentielle et *Phase-Type*) par opposition aux distributions à queue lourde ou distribution des valeurs extrêmes (Log-Normale, Pareto...) caractérisées par la non définition de la fonction génératrice des moments pour  $s > 0$ . Dans cette section on suppose que les sinistres sont issus d'une distribution à queue légère. Il faut noter que l'hypothèse d'une distribution paramétrique pour les sinistres est une hypothèse très forte. Il est très dur de trouver un jeu de données en adéquation avec une telle hypothèse. Cela supposerait une

stationarité de la loi des sinistres dans le temps. Dans un premier temps, un rappel sur la loi exponentielle est donné. Le cas exponentiel est le plus simple et parfois le seul pour lequel il est possible d'obtenir des expressions analytiques concernant les distributions composées. Les distributions *Phase-Type* forment une grande famille paramétrique très utilisée en probabilités appliquées, c'est pourquoi elles font l'objet de la deuxième sous-section.

Ces résultats sont développés dans la section 4.2 de [2].

### III.1 Loi Exponentielle

**Proposition 2.III.1**  $X \sim Exp(\delta)$  alors

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \delta e^{-\delta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ F_X(x) &= 1 - \delta e^{-\delta x} \\ E(X) &= \frac{1}{\delta} \\ Var(X) &= \frac{1}{\delta^2} \end{aligned}$$

**Proposition 2.III.2**

Soit  $(X_i)_{i>0}$  suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\delta$ , alors :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim Erlang(n, \delta)$$

Il est rappelé que

$$f_{S_n}(x) = \frac{e^{-\delta x} \delta^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

### III.2 Loi *Phase-type*

Pour définir les distributions *Phase-Type*, la théorie de processus de Markov en temps continu est nécessaire. Une approche intuitive du concept de processus de Markov, l'accent est mis notamment sur les lois des temps inter-saut.

#### Rappel sur les processus de Markov à temps continu

Soit  $E = \{1, \dots, l\}$  un espace d'état fini et dénombrable. Soit  $(J_t)_{t \geq 0}$  un processus à valeurs dans  $E$ . La loi initiale  $\alpha \in \mathbb{R}^l$  caractérise le système à  $t=0$  :

$$P(J_0 = i) = \alpha_i$$

**Définition 2.III.1**

Le processus  $(J_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov si  $\forall t, h \geq 0$  et  $j \in E$ ,

$$P(J_{t+h} = j | J_u; u \leq t) = P(J_{t+h} = j | J_t).$$

Si de plus la probabilité conditionnelle ci-dessus ne dépend pas de  $t$ , alors :

$$P(J_{t+h} = j | J_t = i) = P_h(i, j), \quad i, j \in E \quad h \geq 0,$$

et le processus  $J_t$  est dit homogène.

La famille de fonction  $P = \{t \rightarrow P_t(i, j); i, j \in E, t \geq 0\}$  est appelée fonction de transition sur  $E$ .

### Définition 2.III.2

Le générateur  $A = (a_{ij})_{i, j \in E}$  d'un processus de Markov est défini par :

$$P_t = e^{At}$$

Ce qui équivaut à

$$A = \left[ \frac{dP_t}{dt} \right]_{t=0}$$

Soit  $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_N$  les instants de saut de  $J$ .

### Proposition 2.III.3

Le temps de séjour dans l'état  $i$  suit une loi exponentielle :

$$P_i(T_1 > u) = e^{a_{ii}u}$$

La loi d'entrée du processus dans le complémentaire de état  $i$  est définie par

$$P_i(J_{T_1} = j) = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}.$$

A noter que  $T_1$  et  $J_{T_1}$  sont des variables aléatoires indépendantes.

Comme  $\sum_{j \in E} P_i(J_{T_1} = j) = 1$  alors

$$\sum_{j \in E/\{i\}} a_{ij} = -a_{ii}. \quad (2.4)$$

### Le formalisme *Phase-type*

Les vecteurs sont par convention des vecteurs colonnes, l'utilisation du vecteur ligne sera signalé par la présence d'une apostrophe signifiant aussi transposé.

Les distributions *Phase-Type* connaissent un grand succès dans le domaine des probabilités appliquées car elle peuvent permettre d'approcher n'importe quel loi à support sur  $\mathbb{R}^+$  (argument de densité de la famille des lois *Phase-Type* dans l'ensemble des lois à surpport sur  $\mathbb{R}^+$ ). Leur définition intuitive via les processus de Markov est aussi un atout pour la modélisation. De nombreuses lois classiques telles que la loi Hyper-Exponentielle ou les loi Erlang sont des lois *Phase-Type*.

Soit  $(\tilde{J}_t)_{t \geq 0}$  un processus de Markov absorbant, son espace d'état est notée  $E \cup \{\Delta\}$  où  $\Delta$  est un état dit absorbant. Le processus s'arrête une fois l'état absorbant atteint.

Le générateur du processus de Markov est une matrice carrée, définie par bloc

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

où  $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{1}_l$ . Cette condition est équivalente à (2.4). Le vecteur  $\mathbf{t}$  représente l'intensité d'entrée dans l'état absorbant à partir d'un état de  $E$ .

Soit  $\zeta = \text{Inf}\{t \geq 0; \tilde{J}_t = \Delta\}$  instant d'entrer dans l'état absorbant du processus.

### Définition 2.III.3

Une variable aléatoire positive et continue possède une distribution *Phase-Type* si elle admet la même loi que le temps d'absorption d'un processus de Markov absorbant. Avec les notations précédentes, cela donne,

$$F_U(x) = P(\zeta \leq x).$$

U admet alors la représentation  $(\alpha, \mathbf{T}, E)$ .

L'un des atouts des distributions *Phase-Type* réside dans leur représentation qui donne lieu à une visualisation à l'aide d'un schéma dont voici quelques exemples.

### Exemple 2.III.1

La loi HyperExponentielle est un mélange de loi exponentielle, sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$

avec  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Le schéma associé est le suivant

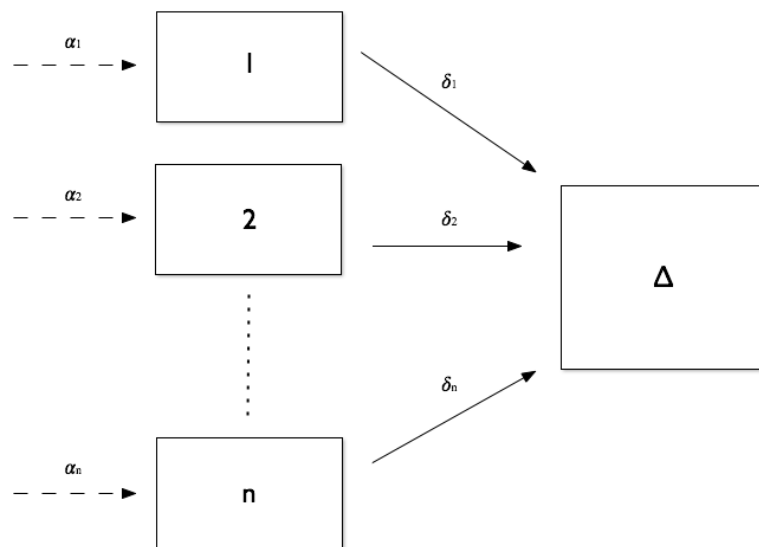


FIGURE 1 – Loi HyperExponentielle formalisme *Phase-Type*



Le générateur associé est de la forme

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} -\delta_1 & 0 & \dots & 0 & \delta_1 \\ 0 & -\delta_2 & \dots & 0 & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\delta_{n-1} & 0 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -\delta_n & \delta_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

### Exemple 2.III.2

La loi de Erlang est la loi d'une somme de  $n$  variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\delta$ , sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f(x) = \frac{e^{-\delta x} \delta^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$

Le schéma associé est le suivant

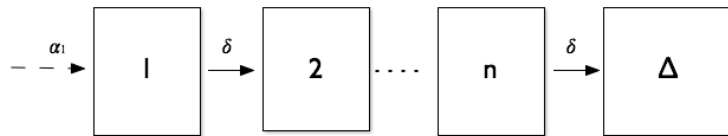


FIGURE 2 – Loi de Erlang formalisme *Phase-Type*

Le générateur associé est de la forme

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cccccc|c} -\delta & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & \delta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\delta & \delta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A noter que le vecteur  $\alpha$  est égal à

$$\alpha' = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0).$$

Voici quelques propriétés fondamentales des distributions *Phase-Type*.

**Proposition 2.III.3**

Soit  $U$  variable aléatoire qui admet une distribution *Phase-Type*.

- (i) La fonction de répartition de  $U$  est  $F_U(x) = 1 - \alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{1}_l$ ,
- (ii) La densité de  $U$  est  $f_U(x) = \alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t}$ ,
- (iii) La fonction génératrice des moments est  $\hat{m}_U(s) = \int_0^{+\infty} e^{sx} dF_U(x) = \alpha' (-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}$ .

**Preuve**

Il est nécessaire de connaître quelques propriétés concernant l'intégrale et la dérivée d'une fonction définie par l'exponentielle d'une matrice.

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \int_0^x e^{\mathbf{A}t} dt = e^{\mathbf{A}x} - \mathbf{I}$$

(i)

$$\begin{aligned} \overline{F}_U(x) &= P_\alpha(\zeta > x) \\ &= P_\alpha(J_x \in E) \\ &= \sum_{i,j \in E} \alpha_i P_t(i, j) \\ &= \alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{1}_l \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f_U(x) &= F'_U(x) \\ &= -\alpha' \frac{d}{dx} e^{\mathbf{T}x} \mathbf{1}_l \\ &= -\alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{T} \mathbf{1}_l \\ &= \alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} L_U(x) &= \int_0^{+\infty} e^{sx} f_U(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{sx} \alpha' e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t} dx \\ &= \alpha' \cdot \left( \int_0^{+\infty} e^{(s\mathbf{I} + \mathbf{T})x} dx \right) \cdot \mathbf{t} \\ &= \alpha' \cdot (-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \cdot \mathbf{t} \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.III.4**

Soit  $U$  variable aléatoire admettant une distribution *Phase-Type* de représentation  $(\alpha, \mathbf{T}, E)$ . Soit  $\eta$  la valeur propre de  $\mathbf{T}$  ayant la plus grande partie réelle. Les vecteurs propres ligne et colonne associés à  $\eta$ , sont respectivement notés  $\nu'$  et  $\mathbf{h}$ . Ces vecteurs sont normalisés de telle sorte que  $\nu' \cdot \mathbf{h} = 1$ . La fonction de survie  $\overline{F_U}$  est asymptotiquement exponentielle,

$$\overline{F_U}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-\eta x},$$

avec  $C = \alpha' \nu' \cdot \mathbf{h} \mathbf{1}_l$ .

**Preuve**

Admise. Pour une description plus complète des distributions *Phase-Type* et de leur propriétés, on peut se référer au chapitre 8 section 1 de [1].

## IV Géométrie composée

Une section entière est consacrée à la géométrie composée pour deux raisons. La première est qu'elle joue un rôle de première importance dans l'étude du modèle de ruine du chapitre suivant. La deuxième est que de nombreuses propriétés intéressantes ont été obtenues à son sujet. Il est possible d'obtenir l'expression exacte de la fonction de répartition d'une géométrie composée lorsque les sinistres sont de loi exponentielle ou *Phase-type*.

Soit  $S = \sum_{i=1}^N U_i$  où  $N \sim \text{Geom}(p)$  avec  $p \in (0, 1)$ ,

$$F_S = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p) p^k F_U^{*k} \quad (2.5)$$

En notant le premier terme de la somme séparément, il vient

$$F_S = (1-p)\delta_0 + pF_U * F_S \quad (2.6)$$

Il s'agit d'une équation de renouvellement défailante.  $F_S$  être vue comme limite d'une suite de fonction  $(F_n)$  définie par la relation de récurrence

$$F_n = (1-p)\delta_0 + pF_U * F_{n-1}, \forall n \geq 1 \quad (2.7)$$

Avec  $F_0$  une distribution initiale arbitraire.

**Proposition 2.IV.1**

Si  $U_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\delta)$  alors

$$\overline{F_S}(x) = p e^{-\delta(1-p)x}$$

## Preuve

$$\begin{aligned}
\overline{F_S}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)p^k \overline{F_U}^{*k}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)p^k \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\delta y} y^{k-1} \delta^k}{\Gamma(k)} dy \\
&= \delta(1-p) \int_x^{+\infty} e^{-\delta y} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\delta p y)^{k-1}}{(k-1)!} dy \\
&= \delta(1-p) \int_x^{+\infty} e^{-\delta y} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\delta p y)^k}{k!} dy \\
&= \delta(1-p) \int_x^{+\infty} e^{-\delta(1-p)y} dy \\
&= p e^{-\delta(1-p)x}
\end{aligned}$$

□

### Définition 2.IV.1

Le coefficient d'ajustement est la seule solution strictement positive de l'équation

$$\widehat{m}_U(s) = \frac{1}{p} \quad (2.8)$$

Cette solution sera notée  $\gamma$ .

Il est supposé que la distribution des sinistres est telle que l'équation (2.8) admette une solution positive. L'existence d'une telle solution implique la définition de la fonction génératrice des momets pour  $s \in [0, x_0]$  où  $x_0 > 0$ . Cette condition implique l'existence d'une abscisse de convergence pour la fonction de survie, ce qui équivaut à dire que la fonction de survie de  $U$  admet une décroissance exponentielle vers 0. L'existence de la fonction génératrice des moment limite la définition du coefficient d'ajustement aux distributions à queue légère telle que la loi Gamma ou la loi exponentielle. C'est également le cas des distributions à support bornée, ce type de distribution est étudiée dans le cadre de la mise en place d'une politique de réassurance. Plus précisément il s'agit d'une stratégie de *Stop-Loss reinsurance* avec la définition d'un seuil de rétention. Une compagnie d'assurance propose d'assurer la prise en charge des sinistres dépassant ce seuil de rétention. L'unicité de la solution est induite par la convexité de la fonction génératrice des moments. L'équation (2.8) porte le nom d'équation fondamental de Cramer-Lundberg. Elle permet la définition des bornes de Cramer-Lundberg .

### Théorème 2.IV.1

Soit  $S$  une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée telle que l'équation (2.6) admette une solution, notée  $\gamma$ , alors

$$a_- e^{-\gamma x} \leq \overline{F_S}(x) \leq a_+ e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0 \quad (2.9)$$

Ce qui équivaut à dire que  $\overline{F_S}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-\gamma x}$

### Preuve

Admise.

Ces résultats sont données dans la section 4.5 de [2].

### Théorème 2.IV.2

Soit  $S$  une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée telle que les sinistres admettent une distribution *Phase-Type* avec représentation  $(\alpha, \mathbf{T}, E)$  alors  $S$  admet une distribution *p-zero modified Phase Type* avec représentation  $(\alpha, \mathbf{T} + p\mathbf{t}.\alpha', E)$ .

Plusieurs remarques à propos de ce résultat. Aucune démonstration rigoureuse ne sera donnée. On peut en donner l'heuristique.

Tout d'abord,  $X = I.Y$  avec  $I \sim B(p)$  indépendante de  $Y$  a une distribution dite *p-zero-modified*.

Ensuite,  $\mathbf{t}.\alpha' \in \mathbb{M}_l$ ,

$$\mathbf{t}.\alpha' = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_l \end{pmatrix} \cdot (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_l) = \begin{pmatrix} t_1\alpha_1 & \dots & t_1\alpha_l \\ \dots & \dots & \dots \\ t_l\alpha_1 & \dots & t_l\alpha_l \end{pmatrix}$$

Afin de mieux comprendre le résultats, il est possible de visualiser une géométrie composée avec des sinistres de loi *Phase Type*. On constate la présence d'un cycle dont le nombre de boucle est aléatoire.

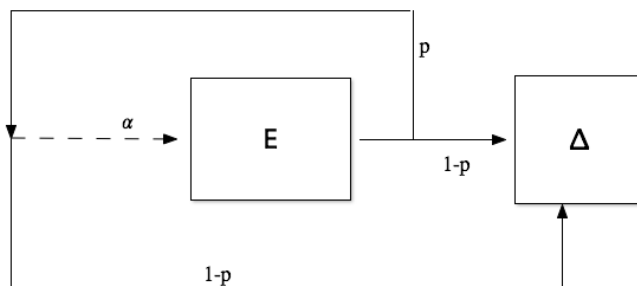


FIGURE 3 – Loi Géométrique composée formalisme *Phase-Type*

On comprend bien à partir de ce schéma que l'espace d'état  $E$  et la loi initiale  $\alpha$  demeurent inchangés. Il est possible d'aller directement d'aller dans l'état absorbant

avec probabilité  $1 - p$ , ce qui signifie que la distribution du temps avant absorption admet une masse de probabilité non nulle en 0. Le générateur associé à cette distribution *Phase-Type* est

$$A_+ = \left( \begin{array}{ccc|c} t_{11} + pt_1\alpha_1 & \dots & t_{1l} + pt_1\alpha_l & (1-p)t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{l1} + pt_l\alpha_1 & \dots & t_{ll} + pt_l\alpha_l & (1-p)t_l \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La probabilité d'aller d'un état vers l'état absorbant est multipliée par  $1 - p$ , probabilité de ne pas repartir pour un tour dans la boucle. Soit  $i, j \in E$  alors la probabilité de passer de  $i$  à  $j$  sans transiter par un autre état est égale à (c.f. Proposition 2.III.3) :

$$P_i(X_{T_1} = j) = -\frac{t_{ij} + pt_i\alpha_j}{t_{ii} + pt_i\alpha_i}$$

On constate que cette probabilité est nulle si les deux conditions suivantes sont réunies

- (i)  $t_{ij} = 0$  implique que les deux états ne communiquent pas ,
- (ii)  $pt_i\alpha_j = 0$  implique au choix que
  - $t_i = 0$  implique que l'état  $i$  ne communique pas avec l'état absorbant,
  - $\alpha_j = 0$  implique que le système ne peut se trouver dans l'état  $j$  initialement et donc ne peut pas y aller en fin de cycle.

En vertu du théorème précédent et des résultats plus généraux sur les distributions *Phase-Type* énoncés dans la section III, nous pouvons affirmer les deux résultats suivants.

#### Corolaire 2.IV.1

Soit  $S$  une variable aléatoire ayant une distribution géométrique composée telle que les sinistres admettent une distribution *Phase-Type* avec représentation  $(\alpha, \mathbf{T}, E)$  alors

(i)

$$\overline{F_S}(x) = p\alpha' \cdot e^{(\mathbf{T} + p\mathbf{t} \cdot \alpha')x} \cdot \mathbf{1}_l$$

(ii)

$$\overline{F_S}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-\eta_+ x},$$

avec  $-\eta_+$  la valeur propre de  $\mathbf{T} + p\mathbf{t} \cdot \alpha'$  ayant la plus grande partie réelle. Ces résultats figurent dans le chapitre 8 section 2 de [1].

# Chapitre 3

## Modèle de Cramer Lundberg

### I Définition du modèle

Le processus stochastique régissant l'évolution des réserves financières est supposé être de la forme

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Le processus de surplus associé est

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - pt.$$

Les hypothèses du modèle de ruine de Cramer-Lundberg sont

- $u > 0$  est la réserve initiale de la compagnie d'assurance,
- $p > 0$  le taux de prime reçues continuellement dans temps,
- $N_t$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\beta$ ,
- $(U_i)_{i>0}$  suite de variables aléatoires, strictement positives, i.i.d. de fonction de répartition  $F_U$ , de moyenne  $\mu$  finie, et indépendantes de  $N_t$ .

Ce modèle est introduit dans le chapitre 3 section 1 de [1].

### II Rappel sur le processus de Poisson

#### Définition 4.II.1

Soit  $(T_i)_{i>0}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre  $\beta > 0$ . Notons  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . Le processus de comptage  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  défini par

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_n < t\}}$$

est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\beta$ .

#### Proposition 4.II.1

Si  $\{N_t\}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\beta$  alors

- (i)  $N_0 = 0$  presque sûrement.

(ii)  $N_t \sim \text{Pois}(\beta t)$

(ii)  $N_t$  est un processus à accroissements stationnaires et indépendants

**Preuve**

(i)

$$P(N_t = 0) = P(\sigma_1 > t) = e^{-\beta t}$$

ce qui implique  $P(N_0 = 0) = 1$ .

(ii) Supposons que  $N_t$  est un processus de Poisson homogène, il est défini par

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_n < t\}}$$

Cela implique que les évènements  $\{N_t = k\}$  et  $\{\sigma_k \leq t \leq \sigma_{k+1}\}$  sont équivalents. Cela donne :

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(\sigma_{k+1} > t) - P(\sigma_k > t) \\ &= \overline{F_{\sigma_{k+1}}}(t) - \overline{F_{\sigma_k}}(t) \end{aligned}$$

Or par définition  $\sigma_k = \sum_{i=1}^k T_i$  où  $T_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\beta)$ , cela implique  $\sigma_k \sim \text{Erlang}(k, \beta)$ . Il vient :

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= \int_t^{+\infty} \frac{\beta^{k+1} e^{-\beta x} x^k}{k!} - \frac{\beta^k e^{-\beta x} x^{k-1}}{k-1!} dx \\ &= \int_t^{+\infty} \frac{d}{dx} \left( -\frac{\beta^k e^{-\beta x} x^k}{k!} \right) dx \\ &= \frac{e^{-\beta t} (\beta t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le point (ii).

L'assertion (iii) est équivalente à :

$$P(\{N_{s_1} = i_1, N_{s_2} - N_{s_1} = i_2, \dots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}} = i_n\}) = \frac{e^{-t_1 \beta} (t_1 \beta)^{i_1}}{i_1!} \cdot \frac{e^{-t_2 \beta} (t_2 \beta)^{i_2}}{i_2!} \dots \frac{e^{-t_n \beta} (t_n \beta)^{i_n}}{i_n!}$$

avec

- $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$
- $t_j = s_j - s_{j-1}$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$
- $i_j \in \mathbb{N}$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$

On note que pour  $n = 1$  la propriété est vérifiée par (ii). Pour la suite de la démonstration, on aura besoin du lemme technique suivant.

### Lemme 3.IV.1

Pour  $i \geq 2$  et  $s, t > 0$ , on a :

$$\int \int_{s \leq y < x \leq s+t} \beta^2 \frac{(\beta(x-y))^{i-2}}{(i-2)!} dy dx = \frac{(\beta t)^i}{i!}$$



## Preuve

$$\begin{aligned}
\int \int_{s \leq y < x \leq s+t} \beta^2 \frac{(\beta(x-y))^{i-2}}{(i-2)!} dy dx &= \beta^i \int_s^{s+t} \int_y^{s+t} \frac{(x-y)^{i-2}}{(i-2)!} dx dy \\
&= \beta^i \int_s^{s+t} \int_0^{s+t-y} \frac{z^{i-2}}{(i-2)!} dz dy \\
&= \beta^i \int_s^{s+t} \left[ \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} \right]_0^{s+t-y} dy \\
&= \beta^i \int_s^{s+t} \frac{(s+t-y)^{i-1}}{(i-1)!} dy \\
&= \beta^i \int_0^t \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz \\
&= \beta^i \left[ \frac{z^i}{(i)!} \right]_0^t \\
&= \frac{(\beta t)^i}{(i)!}
\end{aligned}$$

□

Soit l'évènement  $A = \{N_{s_1} = i_1, N_{s_2} - N_{s_1} = i_2, \dots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}} = i_n\}$ . On définit les variables aléatoires suivantes

- $X_1$  le dernier instant de saut avant  $s_1$ , si  $i_1 \geq 1$
- $Y_k$  le premier instant de saut après  $s_k$ , si  $i_{k+1} \geq 1$  pour  $k \in \{1, \dots, n-1\}$
- $X_k$  le dernier instant de saut avant  $s_k$ , si  $i_k \geq 2$  pour  $k \in \{2, \dots, n\}$
- $Y_n$  le premier instant de saut après  $s_n$

Une écriture équivalente pour A est  $\{0 < X_1 \leq s_1 < Y_1 \leq X_2 \leq s_2 < \dots \leq s_{n-1} < Y_{n-1} \leq X_n \leq s_n < Y_n\}$ . Avec les conventions suivantes

- La relation " $X_1 \leq$ " disparaît si  $i_1 = 0$
- La relation " $< Y_k$ " disparaît si  $i_{k+1} = 0$
- La relation " $X_k \leq$ " disparaît si  $i_k \in \{0, 1\}$

Soit  $(Z_j)_{j \in \{1, \dots, l\}}$  suite de variables aléatoires égales aux  $X_k$  et  $Y_k$  successifs, avec  $Z_l = Y_n$ . on définit  $(b_n)_{n \in \{1, \dots, l\}}$  une suite croissante telle que  $\{Z_1 = T_1 + \dots + T_{b_1}, Z_2 - Z_1 = T_{b_1+1} + \dots + T_{b_2}, \dots, Z_l - Z_{l-1} = T_{b_{l-1}+1} + \dots + T_{b_l}\}$ .

Comme  $T_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\beta)$  alors  $Z_1 \sim \text{Erlang}(b_1, \beta)$  et  $Z_j - Z_{j-1} \sim \text{Erlang}(a_j, \beta)$  avec  $a_j = b_j - b_{j-1}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$ .  $Z_l = Y_n$  implique que  $a_l = 1$ .

La densité jointe  $(Z_1, Z_2 - Z_1, \dots, Z_l - Z_{l-1})$  a une densité jointe égale à un produit de densité Erlang, la densité jointe de  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_l)$  est la même, le Jacobien du changement de variable est égale à 1.

$$\begin{aligned}
f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_l}(z_1, z_2, \dots, z_l) &= P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_l = z_l) \\
&= P(Z_1 = z_1, Z_2 - Z_1 = z_2 - z_1, \dots, Z_l - Z_{l-1} = z_l - z_{l-1}) \\
&= \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\beta(\beta(z_j - z_{j-1}))^{a_j-1}}{(a_j - 1)!} \beta e^{-\beta z_l}
\end{aligned}$$

avec  $z_0 = 0$ . Il reste à intégrer cette densité sur  $A$ , plusieurs situations sont à étudier

- $Z_1 = X_1$  et  $a_1 = i_1$  et  $0 < X_1 \leq s_1$
- Si  $Z_j = Y_k$  et  $Z_{j+1} = Y_{k+1}$  cela signifie que  $a_j = 1$ , le terme indiquée par  $j$  vaut  $\beta$  et  $s_k \leq Y_k \leq s_{k+1}$
- Si  $Z_j = Y_k$  et  $Z_{j+1} = X_{k+1}$  cela signifie que  $a_j = 1$  et  $a_{j+1} = i_{k+1} - 1$ , le produit des deux termes consécutifs indicés par  $j$  et  $j + 1$  vaut  $\beta^2 \frac{(\beta(x_{k+1} - y_k))^{i_{k+1} - 2}}{(i_{k+1} - 2)!}$  et  $s_k < Y_k \leq X_{k+1} \leq s_{k+1}$
- $Z_l = Y_n$  et  $Y_n > s_n$

L'intégration sur  $A$  donne donc

$$\int_0^{s_1} \beta \frac{(\beta x_1)^{i_1 - 1}}{i_1 - 1} dx_1 \times \prod_{1 \leq k \leq n-1} H_k \times \int_{s_n}^{+\infty} \beta e^{-\beta y_n} dy_n$$

avec  $H_k = \frac{(\beta t_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}$  par le lemme technique. On a finalement

$$\frac{(\beta s_1)^{i_1}}{i_1!} \times \prod_{1 \leq k \leq n-1} \frac{(\beta t_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!} \times e^{-\beta s_n} = \prod_{k=1}^n e^{-\beta t_k} \frac{\beta t_k}{i_k!}$$

car  $s_1 = t_1$  et  $s_n = \sum_{k=1}^n t_k$ .

□

### III Probabilité de ruine ultime

La probabilité de ruine ultime est définie par

$$\psi(u) = P \left( \inf_{t \geq 0} R_t < 0; R_0 = u \right),$$

la probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine ultime est définie par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

Dans le premier chapitre, nous avons vu que pour que cette probabilité ne soit pas égale à 1. Il fallait que les primes périodiques  $p$  excèdent la charge moyenne générée par les sinistres par unité de temps. Cette condition dans le modèle de Cramer-Lundberg s'écrit  $p > \beta\mu$ .

**Théorème 3.III.1** (équation intégro-différentielle)

Pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\phi'(u) = \frac{\beta}{p} \left( \phi(u) - \int_0^u \phi(u-y) dF_U(y) \right) \quad (3.1)$$

**Preuve**

Soit  $T_1$  l'instant d'occurrence du premier sinistre et  $h > 0$

$$\phi(u) = E(\phi(u - S(T_1 \wedge h)))$$

L'idée derrière cette ré-écriture est de distinguer les cas ,quand l'on inspecte le processus à l'instant  $h$ , où  $h > T_1$  et  $h < T_1$ .

Lorsque  $T_1 < h$  alors le processus repart d'un instant aléatoire  $T_1$  du point (lui aussi aléatoire)  $u + pT_1 - U_1$ .

Lorsque  $T_1 > h$  alors le processus repart à l'intant  $h$  du point  $u + ph$ .

Mathématiquement, cela donne

$$\phi(u) = \phi(u + ph)P(T_1 > h) + \int_0^h \beta e^{-\beta t} \int_0^{+\infty} \phi(u + pt - y) dF_U(y) dt$$

On multiplie l'équation par  $-1/h$  et on ajoute  $\phi(u + ph)$  des deux côtés pour obtenir

$$\frac{\phi(u + ph) - \phi(u)}{h} = \phi(u + ph) \frac{1 - e^{-\beta h}}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h \beta e^{-\beta t} \int_0^{+\infty} \phi(u + pt - y) dF_U(y) dt$$

La condition  $\phi(u) = 0$  si  $u < 0$  implique que

$$\frac{\phi(u + ph) - \phi(u)}{h} = \phi(u + ph) \frac{1 - e^{-\beta h}}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h \beta e^{-\beta t} \int_0^{u+pt} \phi(u + pt - y) dF_U(y) dt$$

On exploite la propriété suivante, pour  $g$  fonction continue,

$$\frac{1}{h} \int_0^h g(x) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(0)$$

Par passage à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , il vient :

$$p\phi'(u) = \beta \left( \phi(u) - \int_0^u \phi(u - y) dF_U(y) \right)$$

□

**Théorème 3.III.2** (équation intégrale)

Pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\beta}{p} \int_0^u \phi(u - y) \overline{F_U}(y) dy \quad (3.2)$$

**Preuve**

La densité de la variable aléatoire  $U$  est notée  $f_U$ . La transformée de Laplace de  $U$  est définie par

$$L_U(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f_U(x) dx.$$

Le support de la loi de  $U$  est  $\mathbb{R}^+$ , on peut également définir la transformée de Laplace de  $F_U$  qui s'exprime en fonction de celle de  $U$ , pour  $s < 0$

$$\begin{aligned} L_{F_U}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} F_U(x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-sx} F_U(x) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s} L_U(s) \\ &= \frac{1}{s} L_U(s) \end{aligned}$$

Par application à la probabilité de non ruine, il vient

$$\begin{aligned} L_\phi(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \phi(x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-sx} \phi(x) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s} L_{\phi'}(s) \\ &= \frac{1}{s} (L_{\phi'}(s) + \phi(0)). \end{aligned}$$

En passant l'équation (3.1) à la transformée de Laplace il vient

$$\begin{aligned} sL_\phi(s) - \phi(0) &= \frac{\beta}{p} (L_\phi(s) - sL_\phi(s)L_{F_U}(s)) \\ L_\phi(s) &= \frac{\phi(0)}{s} + \frac{\beta}{p} L_\phi(s) \left( \frac{1}{s} - L_{F_U}(s) \right) \\ &= \frac{\phi(0)}{s} + \frac{\beta}{p} L_\phi(s) L_{\overline{F_U}}(s). \end{aligned}$$

On obtient le résultat (3.2) par transformée de Laplace inverse.

□

### Corollaire 3.III.1

$$\phi(0) = 1 - \frac{\beta\mu}{p} \quad (3.3)$$

#### Preuve

On note que  $\phi(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1$ . Par passage à la limite quand  $u \rightarrow +\infty$  de l'équation (3.2), il vient

$$1 = \phi(0) + \frac{\beta}{p} \int_0^{+\infty} (1 - F_U(y)) dy \quad (3.4)$$

$$\phi(0) = 1 - \frac{\beta\mu}{p} \quad (3.5)$$

□

La condition sur le chargement de sécurité  $\eta > 0$  assure que  $\frac{\beta\mu}{p} < 1$ .

### Théorème 3.III.3 (formule de Pollaczeck-Khinchine)

$$\psi(u) = \left( 1 - \frac{\beta\mu}{p} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\beta\mu}{p} \right)^n \overline{F_{U^{*n}}}(u), \quad (3.6)$$

avec,

$$\begin{aligned} F_{U^{*n}}(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_U(y)) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F_U}(y) dy \end{aligned} \quad (3.7)$$

$F_{U^I}$  porte le nom d'*integrated tail distribution* de  $U$ .

### Preuve

On part de l'équation intégrale (3.2) vérifiée par la probabilité de non ruine.

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\beta}{p} \int_0^u \phi(u-y) \overline{F_U}(y) dy$$

En notant que la densité de  $U^I$  est définie par

$$f_{U^I}(x) = \frac{\overline{F_U}}{\mu},$$

en injectant dans l'équation intégrale

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\beta\mu}{p} \int_0^u \phi(u-y) f_{U^I}(y) dy$$

puis en prenant la transformée de Laplace de l'équation

$$\begin{aligned} L_\phi(s) &= \frac{\phi(0)}{s} + \frac{\beta\mu}{p} L_\phi(s) L_{U^I}(s) \\ L_\phi(s) \left(1 - \frac{\beta\mu}{p} L_{U^I}(s)\right) &= \frac{\phi(0)}{s} \\ sL_\phi(s) &= \frac{\phi(0)}{\left(1 - \frac{\beta\mu}{p} L_{U^I}(s)\right)} \\ L_\phi(s) + \phi(0) &= \frac{\phi(0)}{1 - \frac{\beta\mu}{p} L_{U^I}(s)} \\ L_\phi(s) &= \frac{\beta\mu}{p} L_{U^I}(s) \frac{\phi(0)}{1 - \frac{\beta\mu}{p} L_{U^I}(s)} \\ L_\phi(s) &= \left(1 - \frac{\beta\mu}{p}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta\mu}{p}\right)^n L_{U^I}(s)^n \end{aligned}$$

Par transformée de Laplace inverse, il vient

$$\phi'(x) = \left(1 - \frac{\beta\mu}{p}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta\mu}{p} f_{U^I}^{*n}(x)$$

Enfin l'intégration entre  $u$  et  $+\infty$  donne

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\beta\mu}{p}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta\mu}{p}\right)^n \overline{F_{U^I}}^{*n}(u)$$

□

Ce résultat montre que la probabilité de ruine est égale à la fonction de survie d'une loi géométrique composée. On rappelle une définition alternative de la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P(M > u)$$

où  $M = \sup_{t \geq 0} S_t$ , le résultat peut donc s'interpréter de la façon suivante :

$$M = \sum_{i=1}^N U_i^I,$$

avec,

$$- N \sim \text{Geom}\left(\frac{\beta\mu}{p}\right)$$

$$- (U_i^I)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ variables aléatoires positives i.i.d. de fonction de répartition } F_{U^I}$$

Ce résultat justifie l'étude approfondie de la distribution géométrique composée dans le chapitre précédent. Il est possible d'approcher la probabilité de ruine ultime via l'algorithme de Panjer après avoir discrétiser la loi des montants. Il est aussi possible de fournir des bornes et des approximations pour la probabilité de ruine équivalentes à celles obtenues pour la distribution géométrique composée.

### **Théorème 3.III.4**

Sous réserve que la fonction génératrice des moments de  $U_i$ , notée  $\widehat{m}_U(s)$ , soit définie pour une valeur de  $s > 0$  alors

$$\psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} K e^{-\gamma u}, \quad (3.8)$$

avec  $\gamma$  solution positive de l'équation

$$\beta + ps = \beta \widehat{m}_U(s) \quad (3.9)$$

$$\text{et } K = \frac{p - \beta\mu}{\beta \widehat{m}_U(s) - p}.$$

#### **Preuve**

On applique le théorème 2.IV.1, le coefficient d'ajustement est solution de l'équation

$$\widehat{m}_{U^I}(s) = \left(\frac{\beta\mu}{p}\right)^{-1} \quad (3.10)$$

Or pour  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{U^I}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{sx} \frac{\overline{F_U}(x)}{\mu} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{sx} \frac{\overline{F_U}(x)}{\mu} dx \\ &= \frac{1}{\mu} \left( \left[ \frac{e^{sx} \overline{F_U}(x)}{s} \right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{sx} f_U(x)}{s} dx \right) \\ &= \frac{1}{s\mu} (\widehat{m}_U(s) - 1) \end{aligned}$$

L'équation (3.10) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{1}{s\mu} (\widehat{m}_U(s) - 1) &= \frac{p}{\beta\mu} \\ \beta + ps &= \beta\widehat{m}_U(s) \end{aligned}$$

La forme de la constante est admise.  $\square$

Ces résultats et bien d'autres encore section 5.3 de [2]. **Théorème 3.III.5**

Supposons que les  $(U_i)_{i \geq 0}$  possèdent une distribution *Phase-Type* de représentation  $(\alpha, \mathbf{T}, E)$  alors la probabilité de ruine vérifie

- (i)  $\psi(u) = \alpha_+ e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t}\alpha'_+)u} \cdot \mathbf{1}_l$  avec  $\alpha'_+ = -\beta\alpha'\mathbf{T}^{-1}$
- (ii)  $\psi(u) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-\eta_+ x}$ , avec  $-\eta_+$  la valeur propre de  $(\mathbf{T} + \mathbf{t}\alpha'_+)$  ayant la plus grande partie réelle.

**Preuve**

Application du corollaire 2.IV.1.

$\square$

**Exercice**

Supposons que

- Le niveau de prime est  $p = 1$
- l'intensité du processus de Poisson est  $\beta = 3$
- les montants de sinistres sont distribués suivant une loi HyperExponentielle de fonction de survie

$$\overline{F}_U(x) = \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-7x}$$

Le générateur du processus de Markov associé à cette distribution *Phase-Type* est

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le vecteur de probabilité caractérisant le système à l'état initial est

$$\alpha' = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right).$$

Les attributs de la formalisation *Phase-Type* de la distribution géométrique composée associée à la probabilité de ruine sont

$$\alpha'_+ = -\beta\alpha'\mathbf{T}^{-1} = -3 \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{3}{14} \right).$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \mathbf{t}\alpha'_+ = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Afin d'évaluer  $e^{\mathbf{Q}u}$  il est nécessaire de diagonaliser la matrice, ce qui nécessite d'exhiber les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de  $\mathbf{Q}$  défini par

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{Q}}(x) &= x^2 - \text{tr}(\mathbf{Q})x + \det(\mathbf{Q}) \\ &= x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -6$ . Notons  $\nu'_i$  et  $\mathbf{h}_i$  les vecteurs propres ligne et colonne associés à  $\lambda_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  normalisés tels que  $\nu'_i \mathbf{h}_i$ . On a

$$e^{\mathbf{Q}u} = e^{\lambda_1 u} \mathbf{h}_1 \nu'_1 + e^{\lambda_2 u} \mathbf{h}_2 \nu'_2$$

Ce qui donne

$$e^{\mathbf{Q}u} = e^{-u} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-6u} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

d'où

$$\psi(u) = \alpha_+ e^{\mathbf{Q}u} \cdot \mathbf{1}_2 = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}$$

## IV Probabilité de ruine à horizon fini



# Chapitre 4

## Perspective et utilité de la théorie de la ruine

Le principal reproche fait à la théorie de la ruine est la difficulté de sa mise en application par des opérationnels.

- Les hypothèses qui sont faites ne sont pas réalistes. Il est très difficile de trouver un jeu de données montrant l'adéquation du processus de Poisson à la fréquence des sinistres, l'hypothèse d'un portefeuille homogène (montant de sinistres i.i.d.) semble beaucoup trop forte. Il a été démontré des cas de non stationarité liés à des événements exogènes au modèles. Des dépendances entre les montant des sinistres ont aussi pu être exhibés. La vision d'une réserve allouer à une seule business line n'est pas réaliste quand on voit à quel point les compagnies d'assurance se diversifient et que les diverses branches interagissent. La vision 0 – 1 est elle aussi beaucoup remise en cause.
- La théorie de la ruine oblige une certaine maîtrise des mathématiques, et possède un coup d'entrée non négligeable même dans les cas simples où l'on dispose de formule fermée. La calibration des modèles nécessiterait de disposer de beaucoup de données. Les méthodes numériques permettant l'évaluation des probabilités de ruine et des fonctions de répartition des distributions composées sont difficiles à implémenter avec les ressources informatiques mises à la disposition des actuaires et les calculs peuvent être très couteux en temps.

Néanmoins, la probabilité de ruine peut être utilisée à titre d'indicateur, les compagnies d'assurance scandinaves l'ont d'ailleurs prises comme référence par le passé. La théorie de la ruine est perçue comme un "délire" de chercheurs en mal d'inspiration qui se challengent les uns les autres en recherchant dans quel cas particulier sans aucune réalité il est possible de calculer une probabilité de ruine. L'intérêt académique réside dans la transversabilité des résultats qui peuvent dépasser le cadre de l'actuariat. Des quantités très proches sont regardées de près en théorie de files d'attente mais aussi en fiabilité. Une avancée dans un domaine est exploitable dans les autres. Récemment un projet à été lancé pour appliquer des modèles de ruine à la modélisation de la contamination alimentaire.

## I Le lien entre la théorie et la réalité

Le défi des chercheurs en théorie de la ruine n'est plus seulement mathématique, il réside également dans le rapprochement de la théorie à la réalité.

La vision 0 – 1 associée à la probabilité de ruine peut-être nuancée, via le concept de banqueroute qui fait intervenir le déficit à la ruine qui caractérise l'intensité de la ruine et le temps passé en dessous de 0.

Une ruine de faible intensité peut-être compensée par la possibilité d'injecter du Cash en provenance des actionnaires ou de l'état. Une ruine de courte durée peut aussi passer totalement inaperçue. On perçoit une dépendance entre ces deux quantités, c'est pourquoi elle sont souvent modéliser de manière jointe. La dernière assertions semble réaliste car dans les faits les régulateurs n'ont pas le nez dans les comptes de la compagnie d'assurance en permanence. Les comptes sont scrutés de manière périodique lors de l'arrêté des comptes, c'est pourquoi on pourrait se contenter de regarder la santé financière de la compagnie à ces instants précis. De récents travaux proposent aussi de regarder l'état de la situation à des instants aléatoires pour prendre en compte les contrôles inopinés.

La nouvelle directive européenne *Solvency 2* recommandant aux compagnies d'assurance le calcul de leur provision au plus juste attache beaucoup d'importance à la solvabilité à un an ce qui donne du sens à la probabilité de ruine à horizon de temps fini.

De nombreux travaux tentent de rendre plus économique les modèles de ruine en ajoutant un contexte sous la forme d'un taux d'inflation et un taux d'intérêt ce qui va de paire avec une modelisation dynamique. Le modèle de ruine se complique de la façon suivante

$$\begin{cases} dR_t &= pe^{\delta t} dt + R_t i dt - e^{\delta t} X_{N_t} dt \\ R_0 &= u \end{cases}$$

L'ajout de taux d'intérêt et d'inflation nous oblige à définir le modèle sur un intervalle de temps infinitésimal  $[t, t + dt]$ . De façon à ajouter de la flexibilité au modèle, il est possible de considérer ces taux comme étant égaux à des variables aléatoires voire à des processus stochastiques pour avoir un aspect dynamique plus réaliste. Les modèles de taux sont monnaie courante dans la littérature des mathématiques financières. Des travaux modélisent aussi l'environnement économique comme une chaîne de Markov pour laquelle on associe à chaque état un taux d'intérêt et un taux d'inflation spécifique.

Une idée est aussi de tarifer en fonction du niveau de la réserve financière. Lien avec le système de Bonus-Malus.

Il est aussi possible de modéliser le versement de dividendes aux actionnaires. On s'intéresse alors à la stratégie qui permet de maximiser la moyenne des dividendes verser aux actionnaires avant la ruine. Une vision moins cynique consiste à ajouter la contrainte de ne pas être ruiné avec une forte probabilité de façon à garantir une certaine sérénité aux assurés. La stratégie la plus étudiée est du type barrière.

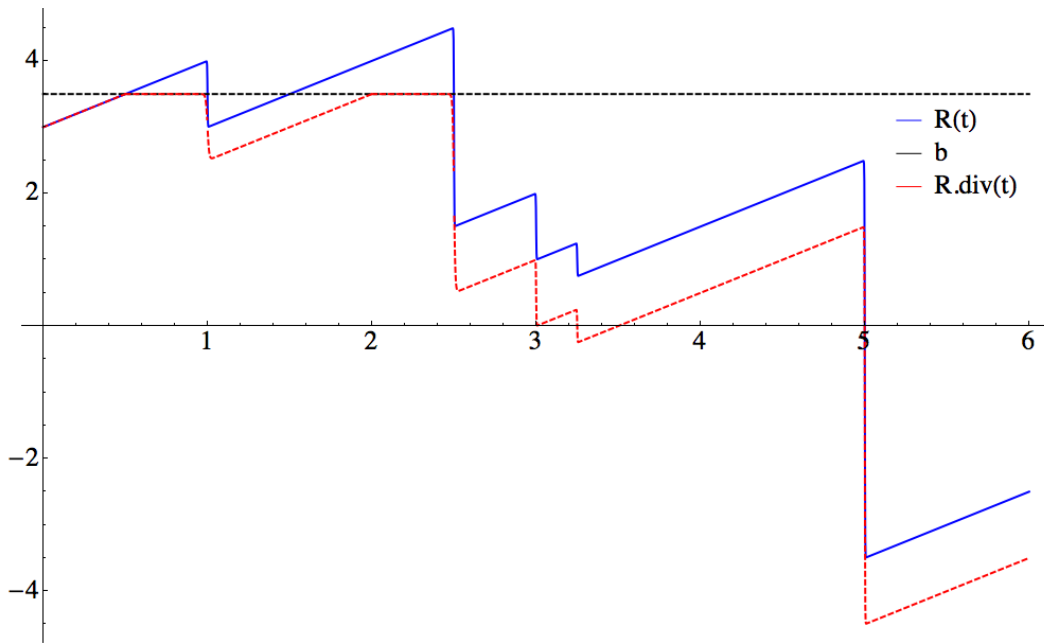


FIGURE 1 – Evolution de la réserve au cours du temps en tenant compte du versement de dividendes aux actionnaires

Enfin, la modélisation conjointe des réserves financières allouer à deux portefeuilles de contrats relatifs à deux branches d'activité conduit à calculer des probabilités de ruine multivariées. La ruine dans une des branches peut-être compensée par la rentabilité de l'autre branche. Cela modélise les interactions entre deux branches. La ruine correspond à la cessation de l'activité dans chacune des deux branches, des stratégies de ré-allocation du capital sont envisageables.

## II Le jeu des hypothèses

Voici une liste non exhaustive des variantes possibles pour la modélisation du processus de réserve.

- Approximation de la charge totale générée par les sinistres via un mouvement Brownien

$$R_t = u + pt - B_t,$$

avec  $\{B_t, t \geq 0\}$  et  $B_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2 t)$ .

- $N_t$  processus de Naissance/Mort ou Poisson non homogène pour contre-carrer la non adéquation du processus de Poisson simple à la fréquence d'arrivée des sinistres impactant le portefeuille.

- Inclure de la dépendance entre les montants de sinistres. En assurance auto, on observe parfois une corrélation entre une suite de petits montants et l'occurrence de gros montants de prestation lié au comportement des garagistes en période de crise.
- Inclure une dépendance entre le temps inter-arrivée entre les sinistres et les montants de sinistres.
  - Dans l'assurance contre les inondations l'occurrence de plusieurs inondations dans des intervalles de temps courts peut générer de gros dégâts et donc de gros montants de prestation à cause de l'accumulation de l'eau,
  - Dans l'assurance contre les séismes, c'est l'inverse. Dans une zone à risque, plus le temps entre deux séismes est grand, plus le second séisme est important du fait de l'accumulation de l'énergie.

Les deux références bibliographiques qui font force de loi en théorie de la ruine sont les livres *Ruin probabilities* d'Asmussen et al [1] ainsi que *Stochastic process for finance and insurance* de Rolski et al [2].

# Bibliographie

- [1] S. Asmussen and H. Albrecher. *Ruin Probabilities*, volume 14 of *Advanced Series on Statistical Science Applied Probability*. World Scientific, 2010.
- [2] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley series in probability and statistics, 1999.