EXAMEN FINAL

Théorie de la mesure – 2018-2019
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	2	2	8	8	20
Score:					

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $A, B \in \mathcal{A}$.

   (a) (1 point) Montrer que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Solution:

$$\mu(A \cup B) = \mu[(A/A \cap B) \cup B] = \mu(A/A \cap B) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B).$$

   (b) (1 point) Montrer que l'application définie par

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

est une mesure de probabilité.

Solution: Nous avons

- $\mu_A(\emptyset) = \frac{\mu(A \cap \emptyset)}{\mu(A)} = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(A)} = 0$

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties disjointes de $\mathcal{A}$,

$$\mu_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\mu\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}{\mu(A)} = \frac{\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n\right)}{\mu(A)} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A \cap A_n\right)}{\mu(A)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_A(A_n).$$

mu_A est une mesure. De plus, comme

$$\mu_A(\Omega) = \frac{\mu(A\cap\Omega)}{\mu(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1.$$

alors mu_A est une mesure de probabilité.

2. Soit $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ ; \ A = -A\}$, où $-A = \{-x \ ; \ x \in A\}$.
   (a) (1 point) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$

   Solution:

   - Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$
   - Pour $x \in A^c$, on a $-x \notin A$ donc $-x \in A^c$. On en déduit que $A^c \in \mathcal{T}$
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$, si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$, donc $-x \in A_n$ puis $-x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On en déduit que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

   $\mathcal{T}$ est bien une tribu.

   (b) (1 point) Montrer que $\mathcal{T}' = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ; \ A = -A\}$ est une tribu.

   Solution: $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu en tant qu'intersection de deux tribus.

3. La fonction gamma est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \ x > 0.$$

   et la fonction beta est définie par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t, \ x, y > 0.$$

   (a) (1 point) Montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

   Solution: Intégration par partie.

   (b) (2 points) En déduire que

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

   et

$$\Gamma(n + 1/2) = \Gamma(1/2)\frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

Solution: On a

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(0) = n!$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1/2) &= (n-1+1/2)\Gamma(n-1+1/2) = \ldots = \Gamma(1/2)\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2^n} \\
&= \Gamma(1/2)\frac{2n!}{2^n(2n)(2n-2)\ldots 2} = \Gamma(1/2)\frac{2n!}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

(c) (2 points) A l'aide du changement de variable $\begin{cases} t = u+v \\ s = u/(u+v) \end{cases}$, établir que

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} f(u+v)u^{x-1}v^{y-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = B(x,y)\int_0^{+\infty} t^{x+y-1}f(t)\mathrm{d}t,$$

où $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction borelienne.

Solution: L'application associée au changement de variable est donnée par

$$\phi : (s,t) \mapsto (st, t(1-s)),$$

de Jacobien

$$\mathrm{Det}J_\phi = \begin{vmatrix} s & t \\ 1-s & -t \end{vmatrix} = -t.$$

On pose $g : (u,v) \mapsto f(u+v)u^{x-1}v^{y-1}$. Par application de la formule de changement de variable, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} g(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_{\phi(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)} g(\phi(s,t))|\mathrm{Det}J_\phi|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} f(t)s^{x-1}(1-s)^{y-1}t^{x+y-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

(d) (1 point) En déduire la formule suivante

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Solution: On pose $f(t) := e^{-t}$.

(e) (2 points) Calculer $\Gamma(1/2)$.

Solution: On fixe $x = y = 1/2$ et on calcule

$$B(1/2,1/2) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = \ldots = \pi,$$

en réarrangeant sous la racine carré et en appliquant le changement de variable $u = 2t-1$.

4. On souhaite calculer l'intégrale de Dirichlet,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t,$$

à l'aide d'une intégrale à paramètre.

(a) (2 points) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.

Solution: La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $(0, \infty)$ et donc localement intégrable. La fonction se prolonge par continuité en 0 avec $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Au voisinage de ∞, une intégration par partie donne

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = -\frac{\cos(M)}{M} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Comme $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ alors l'intégrale converge.

(b) (2 points) Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intrégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Indication:

Définir la suite de fonctions

$$f_n(t) = \frac{\sin t}{t} \mathbb{I}_{[n\pi, (n+1)\pi]}(t),\ n \geqslant 0,$$

trouver un équivalent pour la suite

$$u_n = \int_{\mathbb{R}_+} |f_n(t)| \mathrm{d}\lambda(t), \text{ pour } n \to +\infty.$$

Solution: On note que $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} u_n$. On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u + n\pi)|}{u + n\pi} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u + n\pi} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} |\sin(u)| \frac{n\pi}{u + n\pi} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Comme $|\sin(u)| \frac{n\pi}{u+n\pi} \leqslant 1$ alors par convergence dominée on a

$$\int_0^{\pi} |\sin(u)| \frac{n\pi}{u + n\pi} \mathrm{d}u \to \int_0^{\pi} |\sin(u)| = 2.$$

On en déduit que $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{2}{n\pi}$ puis que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n(t) \mathrm{d}\lambda(t)$ diverge.

(c) (2 points) On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \mathrm{d}t, \ x \geqslant 0.$$

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Indication: On notera que $\sin t = -\mathrm{Im}(e^{-it})$ et on n'hésitera pas à sortir l'operateur partie imaginaire de l'intégrale si nécessaire.

Solution: La fonction $(x,t) \mapsto f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ admet pour dérivée partielle rapport à x la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ qui est continue sur $(0, \infty)$ pour tout $x \geqslant 0$. De plus, pour tout $x > a$, avec $a > 0$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = |\sin t| e^{-at} < e^{-at}.$$

On peut toujours trouver un voisinage de $x > 0$ de la forme $]a, \infty[$, par le théorème de la continuité de l'intégrale à paramètre, on conclut que $F(x)$ est dérivable. On poursuit avec le calcul de la dérivée,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} -\sin t e^{-xt} \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(i+x)} \mathrm{d}t \right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i+x} \right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(d) (2 points) Calculer F(x) et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Solution: En intégrant $F'(x)$ entre $u \leqslant v$, on obtient

$$F(v) - F(u) = \arctan(u) - \arctan(v).$$

Puis en faisant tendre u vers l'infini il vient

$$F(v) = \frac{\pi}{2} - \arctan(v),$$

car

$$F(u) < \int_0^{+\infty} e^{-ut} \mathrm{d}t = \frac{1}{u} \underset{u \to \infty}{\to} 0.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ en posant $v = 0$.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$