EXAMEN FINAL

Théorie de la mesure et intégration– 2019-2020
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	4	7	3	6	20
Score:					

1. Question de cours. Soit Ω un ensemble.
   (a) (1 point) Montrer que l'intersection de deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une tribu.
   (b) (1 point) Soit $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$, une mesure positive définie sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geqslant \max(\mu(A_1), \mu(A_2)), \text{pour tout } A_1, A_2 \in \mathcal{A}.$$

Solution: Comme $A_1, A_2 \subset A_1 \cup A_2$ alors $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_1 \cup A_2)$ et $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1 \cup A_2)$ ce qui implique que

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geqslant \max(\mu(A_1), \mu(A_2)).$$

   (c) (2 points) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonction mesurables, positive de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vers $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$. Montrer la validité de l'égalité suivante

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Solution: La suite $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions positives et croissante dont la limite est une fonction positive $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$. Nous avons donc par Beppo-Lévi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu \overset{BL}{=} \int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \mathrm{d}\mu$$

2. Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$, muni de la tribu formée de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$. On définit la mesure de probabilité μ par

$$\mu(\{x\}) = \frac{1}{n},\ x \in \Omega.$$

Soit P une partition (ensemble de parties, disjointes, non vide, de réunion Ω) de Ω, l'entropie de la partition P est donnée par

$$\mathcal{H}(P) = -\sum_{A\in P} \mu(A) \ln[\mu(A)].$$

(a) (1 point) Existe-t-il une partition d'entropie nulle? Est-elle unique?

Solution: L'entropie est une somme de quantité positive $\mu(A) \times (-\ln(\mu(A)))$, sa nullité entraine la nullité de chacun de ses termes soit

$$\mu(A) \times (-\ln(\mu(A))) = 0, \text{ pour tout } A \in P.$$

Comme A est non vide alors $\mu(A) > 0$ puis $\ln(\mu(A)) = 0$ et enfin $\mu(A) = 1$. Cela implique que la seule partition d'entropie nulle est $P = \{\Omega\}$.

(b) (1 point) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ de cardinal k tel que $0 < k < n$. Donner l'entropie de la partition $P = \{A, A^c\}$ en fonction de k et n.

Solution: On a

$$\mathcal{H}(P) = -\mu(A)\ln\mu(A) - -\mu(A^c)\ln\mu(A^c) = -\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n-k}{n}\ln\left(\frac{n-k}{n}\right).$$

(c) (2 points) Quelle est la partition d'entropie maximale? Justifier votre réponse et donner la valeur de l'entropie maximale. On notera $\mathcal{H}_{\max}$ l'entropie maximale dans la suite.

Solution: La partition d'entropie maximale est la partition composée de singletons. En effet, l'entropie d'une partie contenant deux éléments est inférieur a la somme des entropies des deux singletons. Pour $A = \{x, y\}$, on a

$$-\mu(A)\ln(A) - (-\mu(\{x\})\ln(\{x\}) - \mu(\{y\})\ln(\{y\})) = -\frac{2}{n}\left(\ln\left(\frac{2}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 0.$$

L'entropie maximum est donnée par

$$\mathcal{H}_{\max} = \ln(n)$$

(d) (1 point) Soit $X : \Omega \mapsto \{1, \dots, n\}$, une application bijective. Justifier la mesurabilité de X comme application de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vers $(\{1, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$.

Solution: Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il existe un unique $x \in \Omega$ tel que

$$X^{-1}(\{k\}) = \{x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

comme la tribu des parties de $\{1, \dots, n\}$ est engendrée par les singletons alors X est mesurable.

(e) (1 point) X est une variable aléatoire au départ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, donner sa loi de probabilité. Cette loi de probabilité peut-elle s'écrire comme une mesure à densité, si oui par rapport à quelle mesure?

Solution: La loi de probabilité de X est définie comme la mesure image de μ par X, on note

$$\mathbb{P}_X(k) = \mu(X^{-1}(\{k\})) = \frac{1}{n}.$$

La loi de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de comptage sur $\{1, \dots, n\}$ définie par

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(A), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}),$$

sa densité est donnée par

$$p_X(k) = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_X}{\mathrm{d}\nu}(k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } k = 1, \dots, n.$$

(f) (1 point) Ecrire l'entropie maximale $\mathcal{H}_{\max}$ comme l'espérance d'une fonction de X.

Solution: L'entropie maximale coincide avec $\mathbb{E}(-\ln(p_X(X)))$

3. (3 points) A l'aide du théorème de Beppo Levi, calculer $\lim \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathrm{d}x$, pour $\alpha < 1$.

Indication : Étudier $g_n \colon x \mapsto (n+1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.

Solution: On remarque que pour tout $x \in [0, n]$, $\frac{f_{n+1}}{f_n}(x) = \exp(g_n(x))$. On étudie donc g_n.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= -\frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}} + \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} \\ &= \frac{n(n+1-x) - (n+1)(n-x)}{(n-x)(n+1-x)} \\ &= \frac{x}{(n-x)(n+1-x)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc g_n est croissante et $g_n \geqslant 0$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, on sait que $f_n(x) \to \exp(-x)\exp(\alpha x)$, donc

$$\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x \to \int_0^\infty e^{(1-\alpha)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}.$$

4. Evaluation de l'intégrale de Gauss et de la fonction gamma par les intégrales de Wallis.
   (a) (1 point) L'intégrale de Wallis est définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta, \ n \geqslant 0$$

Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$, pour $n \geqslant 2$. En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, on explicitera cette constante.

Solution:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\cos^{n-1}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\overset{IPP}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\cos^{n-2}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= (n-1)[W_{n-2} - W_n], \end{aligned}$$

puis $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ après ré-arrangement. On note ensuite que $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$. la suite (nW_nW_{n-1}) égale a $W_1W_0 = \pi/2$.

   (b) (1 point) Montrer que

$$W_nW_{n+1} \leqslant W_n^2 \leqslant W_nW_{n-1}.$$

En déduire l'équivalent en l'infini $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solution: On a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \cos^{n+1}(\theta) \leqslant & \quad \cos^n(\theta) & \leqslant \cos^{n-1}(\theta) \\ W_{n+1} \leqslant & \quad W_n & \leqslant W_{n-1} \\ W_{n+1}W_n \leqslant & \quad W_n^2 & \leqslant W_nW_{n-1} \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\frac{n}{n+1}(n+1)W_{n+1}W_n \leqslant nW_n^2 \leqslant nW_nW_{n-1}.$$

Ce qui implique que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

   (c) (1 point) On pose

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Solution: Soit $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{I}_{[0,\sqrt{n}]}$ qui converge $t \mapsto e^{-t^2}$. De plus $|f_n(t)| < e^{-t^2}$, on applique le théorème de convergence dominé pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

(d) (1 point) Exprimer J_n en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}$$

Solution: On note d'abord que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, puis

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n}\int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\to \sqrt{\pi}/2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}.$$

(e) (1 point) Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

où la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}x.$$

Solution:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(f) (1 point) Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, évaluer à l'aide d'un changement de variable l'intégrale

$$K = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2}e^{-(x+y)^2}\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Solution: On effectue le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (u - v)/2 \\ v = (u + v)/2 \end{cases}$$

On définit le C^1- difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$

$$\phi : (u,v) \mapsto \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$$

de Jacobien

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2.$$

On applique la formule de changement de variable pour obtenir

$$\begin{aligned} K &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} \mathrm{d}\lambda(u,v) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \mathrm{d}\lambda(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} \mathrm{d}\lambda(v) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$