EXAMEN DEUXIÈME SESSION

Théorie de la mesure et intégration– 2019-2020
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points:	3	1	3	3	3	0	0	13
Score:								

1. (a) (1 point) Soient $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$, montrer que

$$\bigcup_{n\geqslant 1} A_n^c = \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)^c$$

Solution: On procède par double inclusion,

- Supposons que $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} A_n^c$, alors $\exists n \geqslant 1$ tel que $x \in A_n^c$ puis $x \notin A_n$ et donc $x \notin \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$, puis finalement $x \in \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)^c$
- Supposons que $x \in \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)^c$ alors $x \notin \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ alors $\exists n \geqslant 1$ tel que $x \notin A_n$, donc $x \in A_n^c$ et finalement $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} A_n^c$.

(b) (1 point) Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de densité

$$f_\mu(x) = xe^{-x^2/2}\mathbb{I}_{x>0}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0,1])$.

Solution: $1 - e^{-1/2}$

(c) (1 point) Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

Solution: On note que $e^{-x^2/2} < 1$ pour $x \in [0, 2]$

2. (a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}$ une espace mesurable et $x\Omega$. Montrer que l'application

$$\delta_x : \mathcal{A} \mapsto [0, +\infty),$$

tel que

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $B \in \mathcal{A}$, est une mesure.

Solution:

(i) $x \notin \varnothing$ donc $\delta_x(\varnothing) = 0$

(ii) Soient $(A_n)_{n \in \mathrm{N}^*} \in \mathcal{A}$ une suite d'évènements disjoints. Si $x \in \bigcup_{n \in \mathrm{N}^*} A_n$ alors $\exists n \in \mathrm{N}^*$ tel que $x \in A_n$ et $x \notin A_m$ pour $m \neq n$ (les A_n sont disjoints). On en déduit que

$$\delta_x\left(\bigcup_{n \in \mathrm{N}^*} A_n\right) = 1 = \sum_{n \in \mathrm{N}^*} \delta_x(A_n).$$

De la même façon si $x \notin \bigcup_{n \in \mathrm{N}^*} A_n$ alors

$$\delta_x\left(\bigcup_{n \in \mathrm{N}^*} A_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathrm{N}^*} \delta_x(A_n).$$

(b) (1 point) Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de densité

$$f_\mu(x) = xe^{-x}\mathbb{I}_{x>0}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0, 1])$.

Solution: $1 - 2e^{-1}$

(c) Montrer que

$$0 \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(\ln(1 + u))\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solution: Comme $0 \leqslant \ln(1 + u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$ et que $u \mapsto \sin(u)$ est croissante pour $u \in (0, \pi/2)$ alors

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(\ln(1 + u))\mathrm{d}u \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(u)\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. (a) (1 point) Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty)$

Solution: L'application $f : x \mapsto \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$ est continue sur $(0, +\infty)$.

- Pour $x \to 0$, on a $f(x) \to y$. f est prolongeable par continuité et donc intégrable en 0
- Pour $x \to +\infty$, $f(x) \sim 1/x^2$ donc intégrable.

(b) (2 points) On définit $F(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}\lambda(x)$. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

Solution: Pour tout $y > 0$, l'application est $f : (x, y) \mapsto \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$ dérivable avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-x^2 y}$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < e^{-x^2 y_0}$$

où $0 < y_0 < y$. Comme $x \mapsto e^{-x^2 y_0}$ est intégrable alors en appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient

$$F'(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}.$$

4. (a) (1 point) Calculer la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \mathrm{d}x.$$

Solution: Soit la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right), \ n \geqslant 0.$$

Il s'agit d'une fonction intégrable sur $[0, 1]$ qui vérifie $|f_n(x)| < x^{-1/2}$. Comme $x \mapsto x^{-1/2}$ est une fonction intégrable sur $[0, 1]$ et que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ alors il vient par copnvergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

(b) (2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Montrer que l'application définie par

$$f_a(\omega) = \begin{cases} -a & \text{si } f(\omega) < -a \\ f(\omega) & \text{si } f(\omega) \in [-a, a] \\ a & \text{si } f(\omega) > a \end{cases}$$

est mesurable.

Solution: f est mesurable car elle peut s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions mesurables.

5. (a) (2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ une application mesurable positive. Montrer que l'application définie par

$$\lambda(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \ A \in \mathcal{A}$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution:

(i) $\lambda(\varnothing) = \int_\varnothing f \mathrm{d}\mu = 0$ car $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Soit $(A_n)_{n \in \mathrm{N}*}$ une suites d'évènements disjoints. On a d'une part

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathrm{N}*} A_n\right) = \int_{\bigcup_{n\,\mathrm{N}*} A_n} f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{n \in \mathrm{N}*} \mathbb{I}_{A_n} f \mathrm{d}\mu$$

La suite $f_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k} f$ est une suite croissante de fonctions positives donc par croissance monotone

$$\int_\Omega \sum_{n \in \mathrm{N}*} \mathbb{I}_{A_n} f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k} f \mathrm{d}\mu = \lim \int_\Omega \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k} f \mathrm{d}\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_\Omega \mathbb{I}_{A_k} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathrm{N}*} \lambda(A_n)$$

(b) (1 point) Calculer la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{(-\infty, +\infty)} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \mathrm{d}\lambda(x).$$

Solution: La suite de fonction $f_n(x) = e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}$, $n \geqslant 0$ vérifie $|f_n(x)| < e^{1-|x|}$, où $x \mapsto e^{2-|x|}$ est intégrable. Comme $f_n(x) \to e^{1-|x|}$ lorsque $n \to +\infty$ alors par convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{(-\infty, +\infty)} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \mathrm{d}\lambda(x) = 2e^1$$

6. (a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(g_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables à valeur dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$$

Solution: Voir les notes de cours.

(b) Monter que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \Gamma(s)\zeta(s),$$

où $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{n}\right)^{s-1} \frac{1}{n} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} y^{s-1} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}y\end{aligned}$$

7. (a) Calculer l'intégrale

$$\int_{(0,+\infty)^2} \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

en intégrant d'abord par rapport à x.

Solution:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{4}$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$$

en intégrant par rapport y.

Solution:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2y)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+y)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} \left[\ln\left(\frac{1}{1+y} + x^2 \frac{y}{1+y} \right) \right]_0^{\infty} \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

puis $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$