EXAMEN FINAL

Théorie de la mesure et intégration– 2021-2022
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	5	3	6	3	3	20
Score:						

1. Question de cours indépendantes
   (a) (2 points) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Soit l'application
$$\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu,\ \ A \in \mathcal{A},$$
   Montrer que $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$, puis que ν est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution: Supposons que $\mu(A) = 0$, et posons
$$h = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n \mathbb{I}_{A_n},$$
avec $\alpha_n = \sup\{f(\omega)\ ;\ \omega \in A_n\}$. On a $f \geqslant h$ et donc
$$\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_n \mu(A_n \cap A) = 0.$$
On a

(i) $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\mathrm{d}\mu = 0$

(ii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}$ disjoints. On a

$$\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} f \mathrm{d}\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{I}_{A_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int \mathbb{I}_{A_n} f \mathrm{d}\mu$$

où la dernière étape est justifiée par l'emploi du théorème de convergence monotone.

(b) (2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Montrer que

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A}\ ;\ \mu(A) \in \{0,1\}\}$$

est une tribu.

Solution:

- Comme $\mu(\varnothing) = 0$ alors $\varnothing \in \mathcal{F}$.
- Soit $A \in \mathcal{F}$, on a

$$\mu(A^c) = 1 - \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(A) = 1 \\ 1 & \text{si } \mu(A) = 0 \end{cases}$$

  Donc $A^c \in \mathcal{F}$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}$ disjoint, alors soit
  - $\exists n \in\in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(A_n) = 1$ et

$$1 = \mu(A_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \mu(\Omega) = 1$$

    puis $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 1$
  - $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n) = 0$$

(c) (1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On considère

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\mathrm{d}\lambda(u,v) \text{ et } J = \int_{\mathbb{R}^2} f(3x, x-2y)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exprimer I en fonction de J ou inversement.

Solution: Application de la formule de changement de variable. On trouve que

$$I = 6 \cdot J$$

2. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient

$$A_n = [n - 2^{n+1}, n - 3^{-n-1}],\ n \geqslant 0 \text{ et } A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

(a) (2 points) Montrer qu'une intersection dénombrable d'évènement de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Solution: Voir le cours

(b) (1 point) Calculer $\lambda(A)$

Solution: $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante, on a donc $A = A_0$ puis $\lambda(A) = \lambda(A_0) = -1/3 - (-2) = 5/3$

3. Soit la fonction $t \mapsto F(t)$ définie par

$$F(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \cos(2tx) \mathrm{d}\lambda(x), \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

(a) (1 point) Montrer que $t \mapsto F(t)$ est continue.

Solution: On pose

$$(x,t) \mapsto f(x,t) = e^{-x^2} \cos(2tx).$$

On note que $t \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout $x \in [0,+\infty)$, et de plus

$$|f(x,t)| < e^{-x^2}, \text{ où } x \mapsto e^{-x^2} \text{ est intégrable.}$$

On en déduit par théorème que $t \mapsto F(t)$ est continue

(b) (1 point) Montrer que $t \mapsto F(t)$ est de classe C^1 (dérivable et de dérivée continue).

Solution: On note que $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $x \in [0,+\infty)$, et de plus

$$|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| = 2xe^{-x^2} \sin(2tx) < 2xe^{-x^2}, \text{ où } x \mapsto 2xe^{-x^2}e^{-x^2} \text{ est intégrable.}$$

On en déduit par théorème que $t \mapsto F(t)$ est de classe C^1

(c) (2 points) Montrer que $t \mapsto F(t)$ vérifie

$$F'(t) + 2tF(t) = 0.$$

Solution: D'après la question précédente, on sait que

$$F'(t) = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2} \sin(2tx) \mathrm{d}x.$$

Via une intégration par partie, il vient

$$F'(t) = -2tF(t)$$

(d) (2 points) Donner une expression simple pour $F(t)$.
<u>Indication:</u>

Que vaut $F(0)$? On pourra calculer

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}\lambda(x,y)$$

via un changement de variable classique pour s'en sortir.

Solution: D'après la question précédente

$$F(t) = F(0)e^{-t^2}$$

puis $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ et donc

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}.$$

4. Inversion series-intégrales. Les réponses sont à justifier soigneusement en utilisant les théorèmes du cours!

(a) (1 point) Montrer que pour $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} \mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Solution: On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} \mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+bn)t} \mathrm{d}\lambda(t).$$

On pose

$$f_n(t) = te^{-(a+bn)t}, \text{ pour } n \geqslant 0.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions positives, on peut donc intervertir série et intégrale par convergence monotone. Les intégrales de Lebesgue et de Riemann coincident car les fonctions $t \mapsto \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}$ et $t \mapsto f_n(t)$ sont intégrables. Lorsque $t \to 0$, on a $1 - e^{-bt} \sim bt$ et lorsque $t \to +\infty$ la fonction est équivalente à te^{-at} qui est intégrable. Il vient alors après une integration par partie

$$\int_0^{+\infty} te^{-(a+bn)t} \mathrm{d}t = \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

(b) (2 points) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

Solution: On utilise le développement en série entière suivant

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} e^{-x} \mathrm{d}\lambda(x).$$

L'interversion série intégrale est justifié soit par l'emploi du critère sur les séries de fonctions alternées ou en observant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}\lambda(x) < \infty$$

via le critère de D'alembert avec $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} e^{-x}$. On note que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$ (facile a montrer par récurrence) pour conclure.

5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une application intégrable.

   (a) (1 point) Montrer que

$$\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right)^2 \leqslant \int_\Omega f^2 \mathrm{d}\mu \tag{1}$$

Solution: On applique l'inégalité de Jensen avec la fonction $\varphi : x \mapsto x^2$

   (b) (2 points) Montrer que l'inégalité (1) est une égalité si et seulement si f est une fonction constante.

Solution: $\Leftarrow$ Supposons que $f = a$ $\mu-$pp, alors on a immédiatement

$$\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right)^2 = \int f^2 \mathrm{d}\mu = a^2$$

$\Rightarrow$ Supposons que $\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right)^2 = \int f^2 \mathrm{d}\mu$ On pose $a = \int f \mathrm{d}\mu$ et on remarque que

$$\int (f-a)^2 \mathrm{d}\mu = \int f^2 \mathrm{d}\mu - a^2 = 0$$

Comme $(f-a)^2$ est une application positive alors $(f-a)^2 = 0$ μ-pp puis $f = a$ μ-pp.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Quelques identités: Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

Quelques développement en série entière: Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

et pour $p \in [0, 1)$

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n$$