Intégration L3 Actuariat

Chapitre I: Tribu, mesure et applications mesurables

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 29, 2021

I. Tribus

1. Tribus sur un ensemble quelconque

Soit Ω un ensemble.

Exemple 1

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce en l'air. Il est possible de proposer les espaces suivants

- $\Omega_1 = \{\text{Pile, Face}\}$
- $\Omega_2 = \mathbb{R}^3$ correspondant à la localisation du centre de gravité de la pièce à l'issu du lancer
- $\Omega_3 = \left(\mathbb{R}^3\right)^{[0,T]}$ correspondant à la suite des positions de la pièces à tout instant entre 0 et T

La définition de l'espace d'état va dépendre de ce qui nous intéresse. Ω_3 est un espace fonctionnelle, espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$!

Une fois l'ensemble Ω définit, on introduit les évènements A comme des parties de Ω. On a $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, il s'agit de l'ensemble des résultats ω de l'expérience qui conduisent à la réalisation de A.

Definition 1 (Terminologie)

1. Ω est un évènement certain, $\emptyset$ correspond à un évènement impossible.
2. Pour $A, B \subset \Omega$ deux évènements,

   $$A \cup B \text{ se réalise si } A \text{ ou } B \text{ se réalisent}$$

   et

   $$A \cap B \text{ se réalise si } A \text{ et } B \text{ se réalisent simultanément}$$

3. Pour tout $A \subset \Omega$, on définit par

   $$A^c = \{x \in \Omega \; ; \; x \notin A\}$$

   son complément dans Ω, appelé aussi évènement contraire de A.
4. Soit $B \subset A$, on définit par

   $$A/B = A \cap B^c$$

   la différence entre A et B qui se réalise en cas de réalisation de A mais pas de B.
5. Deux évènements sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Exemple 2 (Discret/Continu)

1. Lancer d'un dé à 6 faces,
    - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
    - $w = 6$ est un évènement élémentaire
    - $A =$ 'Le dé prend une valeur paire' $= \{2,4,6\}$
2. Lancer d'une balle de ping-pong sur une table,
    - $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
    - $w = x, y$ est un évènement élémentaire
    - $A =$ 'La balle tombe dans un gobelet placé au bout de la table'

Definition 2 (Suite d'évènements)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.

1. Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements et
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$
2. Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements et
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Definition 3 (Limite supérieure et inférieure)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de Ω, on définit les limites sup et inf par

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n\geq k} A_n \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n\geq k} A_n.$$

Pour écrire qu'une infinité de A_n se réalisent, on écrit qu'à partir de n'importe quel rang, il existe des évènements qui se réalisent ce qui correpond à la limite sup de (A_n)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n\geq k} A_n.$$

Pour écrire que seul un nombre fini de A_n se réalisent, on écrit qu'il existe un rang à partir duquel seul les évènements contraires aux A_n se réalisent. Cela correspond à la limite inf de la suite (A_n^c)

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n^c = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n\geq k} A_n^c.$$

Le signe intersection s'interprète de la même façon que "*pour tout*" et le signe union joue le rôle d'"*il existe*"

Exemple 3

Soit $\Omega = \{1,2,3\}$, on définit une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec

$$A_{2n-1} = \{1,2\} \text{ et } A_{2n} = \{2,3\}$$

alors on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{1,2,3\} \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{2\}.$$

Ce concept de limite sup et inf provient de l'analyse réelle pour construire des suites numériques convergentes à partir de suites qui ne sont pas monotones. Toute suite croissante (resp. décroissante) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\sup\{a_n\ ;\ n\geq 1\}\left(\text{ resp. } \lim_{n\to+\infty} a_n=\inf\{a_n\ ;\ n\geq 1\}\right)$$

Definition 4 ($\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$)

On appelle limite supérieure (resp. limite inférieur) d'une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ l'élement de $\overline{\mathbb{R}}$, notée et définie par

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n=\lim_{k\to+\infty}\left(\sup_{n\geq k} a_n\right)=\inf_{k\geq 0}\left(\sup_{n\geq k} a_n\right)\ \left(\text{ resp. } \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n=\lim_{k\to+\infty}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right)=\sup_{k\geq 0}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right)\right)$$

A la différence de la limite d'une suite, les limites sup et inf existent toujours. Ces notions sont symétriques au sens où

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n=-\overline{\lim_{n\to+\infty}}(-a_n).$$

Des exemples de suites qui ne convergent pas au sens habituelle incluent

- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

pour lesquels

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = 1 \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = -1$$

Proposition 1 (Lien avec la limite classique, monotonie des limites inf et sup)

1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors*

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n &\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \\
\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = a &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = a \\
\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \\
\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty
\end{aligned}$$

2. *Les limites inf et sup sont monotones au sens où, pour deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$,

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$$

Remarque 1

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}$$

Proposition 2

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$. On a

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n &\leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) && (1)\\
&\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) \\
&\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n && (2)
\end{aligned}$$

Chacune des inégalités (1) et (2) devient une égalité si l'une des suites converge.

Exemple 4

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, considérons une suite d'intervalles fermés définit par

$$A_n = [(-1)^n, 1 + 2^{-n}]$$

on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = [-1, 1] \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{1\}.$$

Pour la limite supérieur on constate que le fait que k soit pair ou impair ne change rien car

- si k est pair alors
$$\bigcup_{n\geq k} [(-1)^n, 1 + 2^{-n}] = \left[1, 1 + 2^{-k}\right] \cup \left[-1, 1 + 2^{-(k+1)}\right] \cup \ldots = \left[-1, 1 + 2^{-k}\right]$$
- si k est impair alors $\bigcup_{n\geq k} [(-1)^n, 1 + 2^{-n}] = \left[-1, 1 + 2^{-k}\right]$

Definition 5 (Tribu, espace mesurable)

Un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire,
$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = \Omega / A \in \mathscr{A}.$$
3. $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable,
$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathscr{A}.$$

$\mathscr{A}$ est parfois appelée σ-algèbre.

Exemple 5 (Exemples de tribus)

- $\{\Omega, \emptyset\}$ est la tribu triviale
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu
- Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ alors $\{\Omega, \emptyset, a, \{b, c, d\}\}$ est la plus petite tribu contenant a.

Les propriétés de stabilité de cette classe permettent de combiner des évènements pour en créer des nouveaux qui appartiendront eux aussi à la tribu.

Exemple 6

On reprend l'expérience du pile ou face, soit

$$A = \text{"Le nombre de lancer nécessaire pour obtenir Pile est pair"}$$

A est la réunion dénombrable des évènements

$$A_p = \text{"Pile apparaît pour la première fois au } 2p\text{-ième lancer"}.$$

Proposition 3

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de Ω et (A_n) une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, on a

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathscr{A}$
3. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$
4. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$
5. $\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_i \in \mathscr{A}$
6. $\underline{\lim_{n \to +\infty}} A_i \in \mathscr{A}$

Il s'agit de conséquences assez immédiates des axiomes des bases

Definition 6 (Sous-tribus)

Une sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ est une tribu de Ω telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$.

Proposition 4

L'intersection de deux tribus de Ω est une tribu.

Definition 7 (Tribu engendrée)

La tribu engendrée par $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ (famille de parties de Ω), notée $\sigma(\mathscr{E})$ est l'intersection de toute les tribus contenant $\mathscr{E}$.

$\sigma(\mathscr{E})$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathscr{E}$.

Exemple 7

1. Soit $A \in \Omega$ alors $\sigma(A) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$
2. Soit $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ une partition de Ω, c'est à dire que

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \Omega, \text{ et } S_i \cap S_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

Alors $\sigma(\mathscr{S}) = \left\{\bigcup_{k \in T} S_k \ ; \ T \subset \{1, 2, \dots, n\}\right\}$

2. Tribu Borélienne

Definition 8 (Espace topologique)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{O}$ une famille de parties de E, appelée ouverts de E, vérifiant

- $\emptyset, E \in \mathcal{O}$,
- Stable par réunion quelconque (dénombrable ou pas),
- Stable par intersection finie.

Le couple $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique

Exemple 8 (Ouvert dans un espace métrique)

Si E est un espace métrique alors on peut définir une distance entre $x \in E$ et $y \in E$ par $d(x,y)$. Un ouvert O est une partie de E dont la frontière est vide, ou dont tout les point apartiennent à l'intérieur de O. Concrètement,

$$\forall x \in O, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,y) = \{y \in E \ ; \ d(x,y) < r\} \subset O$$

Pour $E = \mathbb{R}$, les ouverts sont les parties qui pour chaque point x contiennent un intervalle du type $]x-\epsilon, x+\epsilon[$. On note

$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}} = \{]a,b[, \ -\infty < a \leq b < +\infty\},$$

l'ensemble des intervalles ouverts bornées. Il contient $\emptyset$ (cas a=b).

Definition 9 (Tribu borélienne, borélien)

La tribu borélienne est la tribu $\mathscr{B}(E)$ engendré par les ouverts de E. On appelle borélien un ensemble appartenant à cette tribu.

La tribu borélienne $\mathscr{B}(E)$ contient tout les ouverts de E, ainsi que tout les fermés (par passage au complémentaire), les intersections et réunions de suites d'ouverts et de fermés. La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, c'est la conséquence du lemme suivant.

Lemme 1

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts

preuve:
Remarquons que l'ensemble

$$\mathscr{I}^* = \left\{ \left] r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right[\ ; \ r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est dénombrable puisqu'il existe une bijection de $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}^*$ sur $\mathscr{I}^*$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, supposé non vide, et soit $x\in U$. Il existe un $\epsilon>0$ tel que $]x-\epsilon,x+\epsilon[\subset U$, puis $\exists n\geq 0$ tel que $\frac{1}{n}\leq\frac{\epsilon}{2}$ et enfin un

$$r\in\mathbb{Q}\cap\left]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right[.$$

On voit alors que

$$x\in\left]r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n}\right[.$$

A chaque $x\in U$ est associé un intervalle $I_x\in\mathscr{I}^*$ tel que $x\in\mathscr{I}_x\subset U$ si bien que $U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}I_x\subset U$ et , par suite $\bigcup_{x\in U}I_x=U$. On écrit donc U comme la réunion d'une suite $(I_n)\in\mathscr{I}^*$ qui est aussi une suite de $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$ puisque $\mathscr{I}^*\subset\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$.

$\square$

La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ peut donc être généré par différents type d'intervalles dont

- $[a,b]$
- $[a,+\infty[$
- $]a,+\infty[$
- $]a,b]$

Definition 10

Soient Ω et Ω' deux ensembles. La tribu engendrée par les ensembles $A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des tribus de Ω et Ω' respectivement, est la tribu produit $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$

Proposition 5

1. *Si* $\mathscr{A} = \sigma(A_i\ ,\ i \in I)$ *et* $\mathscr{B} = \sigma(B_j\ ,\ j \in J)$ *alors*

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(A_i \times B_j\ ,\ (i,j) \in I \times J)$$

2. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$

II. Mesures

1. Définition et propriétés

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace mesurable.

Definition 11 (Mesure (positive))

On appelle mesure (positive) une application $\mu : \mathscr{A} \mapsto \overline{R}_+$ telle que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de parties disjointes de $\mathscr{A}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n). \text{ (} \sigma\text{-additivité)}$$

Le tripet $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Definition 12 (Terminologie)

1. Si $\mu(\Omega) < +\infty$ alors μ est une mesure finie
2. Si $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{A}$, disjoints, vérifient

$$n \geq 1,\ \mu(A_n) < \infty \text{ et } \bigcup_{n\geq 1} A_n = \Omega$$

   alors μ est σ-finie.
3. Si $\mu(\Omega) = 1$ alors μ est une mesure de probabilité. D'ailleurs on désigne parfois $(\Omega, \mathscr{A})$ comme un espace probabilisable.
4. Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré (ou probabilisé si μ est une mesure de probabilité).
5. Une mesure signée est une mesure définie comme la différence de deux mesures positives.
6. Une propriété $\mathscr{P}$ est vraie μ-presque partout s'il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que

$$\forall x \in \Omega/A,\ \mathscr{P}(x) \text{ est vraie et } \mu(A) = 0$$

7. Soit $A \in \mathscr{A}$, on dit que μ est portée par A si $\mu(A^c) = 0$.
8. μ est une mesure atomique si elle est portée par les atomes $\{\omega \in \Omega\}$
9. μ est une mesure diffuse si $\mu(\{\omega\}) = 0$ (les atomes $\{\omega\}$ sont des parties négligeables)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition 6 (Propriété d'un mesure)

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements de $\mathscr{A}$.

1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$
2. *Si $A_1 \subset A_2$ alors $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (monotonie de μ), de plus, si $\mu(A_1) < \infty$, on a*
$$\mu(A_2/A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$$
3. $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$ *(formule inclusion-exclusion)*
4. $\mu(A_1 \cap A_2) \leq \min(\mu(A_1), \mu(A_2))$ *et* $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \max(\mu(A_1), \mu(A_2))$
5. $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \text{ (sous } \sigma\text{-additivité)}$$
6. *Si (A_n) est une suite croissante ($A_i \subset A_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}^*$) et que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = A$, alors $(\mu(A_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante qui converge vers $\mu(A)$.*
7. *Si (A_n) est une suite décroissante ($A_{i+1} \subset A_i$, $i \in \mathbb{N}^*$) telle que $\mu(A_1) < \infty$ et que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = A$, alors $(\mu(A_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers $\mu(A)$.*

preuve:

1. On suppose que $A_i = \emptyset$ pour tout $i > 2$ et on exploite la σ-additivité de μ.
2. Soit $A_1 \subset A_2 \subset \mathscr{A}$, on a

   $$\mu(A_2) = \mu(\{A_2/A_1\} \cup A_1) = \mu(A_2/A_1) + \mu(A_1) \geq \mu(A_1) \text{ (car } \mu \text{ est une mesure positive)}$$

   On déduit immédiatement de ce qui précède que $\mu(\{A_2/A_1\}) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$
3. Soit $A_1, B_2 \in \mathscr{A}$, on a

   $$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu\{A_1 \cup [A_2/(A_1 \cap A_2)]\} \\ &= \mu(A_1) + \mu[A_2/(A_1 \cap A_2)] \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

4. Examen

5. On définit la suite $(B_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{A}$ telle que

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & A_1, \\ B_2 & = & A_2 \cap A_1^c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_n & = & A_n \cap A_{n-1}^c \cap \ldots \cap A_1^c \end{array}$$

Les B_n sont disjoints et vérifient $B_n \subset A_n$. On vérifie que

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

par double inclusion. On a d'une part

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

et de plus pour $\omega \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, il existe un plus petit n_0 tel que $\omega \in A_{n_0}$ puis $\omega \in B_{n_0}$ et $\omega \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$. On en déduit que

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \supset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

puis l'égalité. On peut alors écrire

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).$$

6. Comme $\mu(A_{i+1}) \geq \mu(A_i)$ et $\mu(A_i) < \mu(A)$ alors $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante bornée, donc qui converge. Soit $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n/A_{n-1}$ pour $k \geq 2$, les B_k sont disjoints et vérifient $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n$ (on peut vérifier cela par récurrence). On a

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

7. Considérons la suite définit par

$$A'_n = A_1/A_n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de limite

$$A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A'_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_1 \cap A_n^c = A_1 \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c = A_1 \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)^c = A_1 \cap A^c = A_1 \cap A$$

On a donc

$$\lim \mu(A'_n) = \mu(A') \Leftrightarrow \lim \mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(A) \Leftrightarrow \lim \mu(A_n) = \mu(A)$$

A noter que l'on a besoin que $\mu(A_1) < \infty$, pour pouvoir considérer la suite des $A'_n = A_n^c$, on aurait besoin de $\mu(\Omega) < \infty$.

$\square$

Proposition 7

Soient μ et ν deux mesures définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ et $\alpha > 0$ alors

1. $\mu + \nu$ *est une mesure*
2. $\alpha \times \mu$ *est une mesure*

2. Mesure de comptage

Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable,

Definition 13 (Mesure de Dirac)

Soient $x \in \Omega$ et $A \in \mathscr{A}$. La mesure définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

est appelée mesure de Dirac en x.

Montrons que $A \mapsto \delta_x(A)$ définit bien une mesure.

1. $\delta_x(\emptyset) = 0$
2. Soit $(A_i)_{i \geq 0}$ une suite d'évènements disjoints de $\mathscr{A}$.
   - S'il existe i tel que $x \in A_i$ alors $x \in \bigcup_j A_j$ et $\delta_x\left(\bigcup_j A_j\right) = 1$. De plus, comme les A_i sont disjoints alors $x \notin A_j$ pour $j \neq i$. On a donc
   $$\sum_j \delta_x(A_j) = \delta_x(A_i) = \delta_x\left(\bigcup_i A_i\right) = 1.$$
   - Si $x \notin A_i$, $\forall i$ alors $x \notin \bigcup_i A_i$ et
   $$\delta_x\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \delta_x(A_i) = 0.$$

Definition 14 (Mesure de comptage)

Si Ω est un ensemble dénombrable alors

$$C(A) = \mathrm{Card}(A)\ ,\ A \in \mathscr{A}$$

définie une mesure appelée mesure de comptage. Il est possible d'écrire

$$C(A) = \sum_{x \in \Omega} \delta_x(A).$$

2. Mesure de probabilité

Une expérience aléatoire est répétée n fois, supposons que A s'est réalisé $k \leq n$ au cours de ces expériences. k est la fréquence absolue d'occurence de A et k/n est sa fréquence d'occurence relative. Lorsque n devient grand, la fréquence relative se stabilise autour d'un nombre $\mathbb{P}(A)$ appelé probabilité de A.
A partir des fréquences relatives on constate que

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

propriétés cohérentes avec la définition d'une mesure. Il s'agit de l'interprétation dite fréquentiste des probabilités.

Exemple 9 (Evènements élémentaires équiprobables)

Soit une expérience aléatoire dont les résultats ω sont équiprobable et forment un ensemble Ω fini. L'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

est une mesure de probabilité. On a

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

et le calcul des probabilités se résume à des problèmes de dénombrement.

Montrer que $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ est une mesure de probabilité $\Rightarrow$ Examen.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Lemme 2 (Borel-Cantelli, première partie)

Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'évènements telle que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right) = 0.$$

preuve:
Notons que

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq i} A_n) \leq \sum_{n\geq i} \mathbb{P}(A_n), \text{ pour tout } i \geq 1,$$

d'après la Proposition 5. De plus, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n \subset \bigcup_{n\geq i} A_n$ pour tout $i \geq 1$. Donc

$$0 \leq \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n) \leq \sum_{n\geq i} \mathbb{P}(A_n), \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Le membre de droite tend vers 0 comme reste d'une série convergente.
□
La probabilité qu'une infinité d'évènements se réalisent est nulle. $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$ est un évènement presque impossible (ou de mesure de probabilité négligeable). On a de manière équivalente

$$\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n^c) = 1$$

$\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n^c$ est un évènement presque certain.

Definition 15 (Probabilité conditionnelle)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux évènements, tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on définit la probabilité conditionnelle de A sachant B par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

L'application $\mathbb{P}(.|B)$ définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, en effet,

1. $\mathbb{P}(\emptyset|B) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0.$
2. $\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements disjoints alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n | B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n|B).$$

On peut montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_B = \{A \cap B,\ A \in \mathscr{A}\}$ est une tribu, appelée tribu trace, et définir un nouvel espace probabilisé avec $(\Omega, \mathscr{A}_B, \mathbb{P}(.|B))$

Theoreme 1 (Loi des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *une partition de* Ω*, telle que* $\mathbb{P}(A_i) > 0,\ \forall i \geq 1$*, alors*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i), \text{ pour tout } B \in \mathscr{A}.$$

preuve: On a, pour tout $B \in \mathscr{A}$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Theoreme 2 (Bayes)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *une partition de* Ω*, telle que* $\mathbb{P}(A_i) > 0\ \forall i \geq 1$*, et* $B \in \mathscr{A}$ *un évènement de probabilité non nulle. Alors,*

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

preuve:

examen.

Exemple 10

Rey tente de s'échapper des griffes de Kylo Ren et de l'empire. Elle choisit au hasard un véhicule parmi

- le Millenium Falcon (MF)
- Le TIE fighter (TIE)
- Le X-Wing starfighter (XW)

La probabilité qu'elle s'échappe (E) est de

- 0.4 si elle opte pour le Millenium Falcon
- 0.6 si elle opte pour Le TIE fighter
- 0.7 si elle opte pour Le X-Wing starfighter

Quelle est la probabilité qu'elle s'échappe si elle a choisit le Millenium Falcon?

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(MF) = \mathbb{P}(TIE) = \mathbb{P}(XW) = 1/3$ et

$$\mathbb{P}(E|MF) = 0.4,\ \mathbb{P}(E|TIE) = 0.6,\ \text{et } \mathbb{P}(E|XW) = 0.7$$

On applique la formule de Bayes pour obtenir

$$\mathbb{P}(MF|E) = \frac{\mathbb{P}(E|MF)\mathbb{P}(MF)}{\mathbb{P}(E|MF)\mathbb{P}(MF) + \mathbb{P}(E|TIE)\mathbb{P}(TIE) + \mathbb{P}(E|XW)\mathbb{P}(XW)}$$

et on remplace.

Definition 16 (Evènements indépendants)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, Les évènements $A, B \in \mathscr{A}$ sont indépendants sous la probabilité B si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On observe directement que

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Proposition 8

Si A et B sont indépendants sous $\mathbb{P}$ alors

1. *A^c et B sont indépendants*
2. *A et B^c sont indépendants*
3. *A^c et B^c sont indépendants*

preuve:

1. On note que
$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$
puis
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
et finalement
$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c),$$
d'où l'indépendance de A et de B^c.
2. Même raisonnement
3. idem

Definition 17 (Evènements mutuellement indépendants)

La suite $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{A}$ est une suite d'évènement mutuellement indépendants si pour tout sous ensemble $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ d'évènement, avec $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ un ensemble d'indices, on a
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Exemple 11

Il ne faut pas confondre mutuellement indépendant et indépendant deux à deux !
En effet, soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) \text{ et } \mathbb{P}(\omega_i) = 1/4, \forall i = 1,2,3,4.$$

On définit les évènements $A_1 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_4\}$ et $A_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$ alors on observe que A_1 et A_2 sont indépendants, A_1 et A_3 sont indépendants et A_2 et A_3 sont indépendants. Cependant,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3).$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements mutuellement indépendants.

Proposition 9

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

preuve:

La suite d'évènement $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, on a donc

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Lemme 3 (Borel-Cantelli deuxième partie)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, *alors*

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n) = 1.$$

preuve:

Notons que (pour exploiter l'indépendance des A_n)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n = \left(\bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} A_n^c\right)^c = \left(\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n^c\right)^c.$$

Comme les évènement A_n^c sont indépendants alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n^c\right) = \prod_{n\geq k} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n\geq k} (1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

Comme $1-x \leq e^{-x}$ pour $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq k} A_n^c\right) \leq \exp\left(-\sum_{n \geq k} \mathbb{P}(A_n)\right) = 0.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq k} A_n^c\right) = 1$$

pour tout $k \geq 1$ et donc valable lorsque $k \to \infty$. Or $(\bigcup_{n \geq k} A_n)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante et donc $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \to +\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} A_n) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq k} A_n) = 1.$

□

En combinant les deux partie du lemme de Borel-Cantelli, on parvient au résultat suivant

Theoreme 3 (Loi du 0-1)

Pour $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants, on a

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n \to +\infty} A_n\right) = \begin{cases} 1, & si \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \\ 0, & si \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \end{cases}$$

Exemple 12

Admettons qu'on lance une pièce un nombre infini de fois, si on note

$$A_n = \text{"le n-ième lancer est pile"}$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$ et donc $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n) = 1$, ce qui revient à obtenir de façon certain un nombre infini de pile.

3. Mesure de Lebesgue

Definition 18 (Mesure de Lebesgue)

On appelle mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, la mesure λ telle que, pour tout intervalle $]a,b]$,

$$\lambda(]a,b]) = b - a.$$

La mesure de Lebesgue est la seule mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ qui mesure un intervalle par sa longueur. Une idée de la preuve est donné en appendice.

Conséquence:

- λ est une mesure σ-finie
- $\lambda(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, λ est une mesure diffuse.
- La mesure de Lebesgue d'un ensemble dénombrable est nulle
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda(]a,b]) = \lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = \lambda([a,b[)$$

- La mesure de Lebesgue est invariante par symétrie et translation, précisément si on pose

$$A^{-} = \{y \in \mathbb{R} : \ -y \in A\} \text{ et } A + x = \{y \in \mathbb{R} : \ y = x + z, \ z \in A\}$$

alors $\lambda(A) = \lambda(A^{-}) = \lambda(A + x)$

Definition 19 (Mesure de Lebesgue sur les pavés)

On appelle mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$ la mesure λ_k telle que, pour $A = \prod_{i=1}^k]a_i, b_i[$,

$$\lambda_k(A) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i).$$

Exemple 13 (Discret/Continu)

1. Lancer d'un dé à 6 faces,
   - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - $\text{Card}(\Omega) = 6$
   - $w = 6$ est un évènement élémentaire
   - $A =$ 'Le dé prend une valeur paire' $= \{2, 4, 6\}$
   - $\text{Card}(A) = 3$
   - La probabilité de A est donnée par $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$
2. Lancer d'une balle de ping-pong sur une table,
   - $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
   - $\mu(\Omega) = l * L$
   - $w = x, y$ est un évènement élémentaire
   - $A =$ 'La balle tombe dans un gobelet placé au bout de la table'
   - $\mu(A) =$ "Aire couverte par les gobelets"
   - La probabilité de A est donnée par $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Il s'agit d'un cas particulier dans lequel la balle atteint n'importe quel point de la table avec la même probabilité.

III. Applications mesurables

1. Rappels et définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ et $(E, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, et $f : \Omega \mapsto E$ une application. On définit l'application inverse de f par $f^{-1} : \mathscr{P}(E) \mapsto \mathscr{P}(\Omega)$ par

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}, \text{ pour } B \in \mathscr{P}(E).$$

On écrit aussi $f^{-1}(B) = \{f \in B\}$. Elle vérifie, ,

- $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(B_i\right)$,
- $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}\left(B_i\right)$
- $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

où $B, (B_i)_{i \in I} \in E$ et I est un ensemble d'indice.

Proposition 10 ($(g \circ f)^{-1}$)

Considérons trois ensembles non vides E_1, E_2 et E_3, et deux fonctions $f : E_1 \mapsto E_2$ et $g : E_2 \mapsto E_3$. Alors pour tout $A_3 \subset E_3$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(A_3) = f^{-1}\left[g^{-1}(A_3)\right].$$

Definition 20 (Application mesurable)

Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ et $(E, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables. $f : \Omega \mapsto E$ une application mesurable si

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \text{ pour tout } B \in \mathscr{B}.$$

Definition 21 (Variable aléatoire réelle)

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable $X : (\Omega, \mathscr{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

Les variables aléatoires réelles permettent de quantifier les évènements d'une expérience aléatoire. On peut définir des vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_p)$ comme applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ vers $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^p})$.

Exemple 14 (Fonction indicatrice)

Soient $A \subset \Omega$ l'application $\mathbb{1}_A : \Omega \mapsto \{0,1\}$, définie, par

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici $\mathscr{B} = \mathscr{P}(\{0,1\})$. Soit $B \in \mathscr{B}$, on a

- $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \emptyset$ si B ne contient ni 0, ni 1. En fait $B = \emptyset$
- $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = A$ si B contient 1 et pas 0
- $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = A^c$ si B contient 0 mais pas 1
- $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \Omega$ si B contient 0 et 1

Si $A \in \mathscr{A}$ alors l'application $\mathbb{1}_A$, aussi appelé fonction indicatrice sur A est mesurable.
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ forment une partition de Ω alors l'application

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ vers $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Theoreme 4

Soit Ω un ensemble. Soit $(E, \mathscr{B})$ un espace mesurable et soit $f : \Omega \mapsto E$ une application. On a

1. $f^{-1}(\mathscr{B}) = \left\{ f^{-1}(B)\ ,\ B \in \mathscr{B} \right\}$ *est une tribu sur* Ω
2. *Pour tout* $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$: $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$

preuve:

1. On exploite les propriétés ensemblistes de f^{-1},
   (i) $f^{-1}(E) = \Omega$ donc $\Omega \in f^{-1}(\mathscr{B})$
   (ii) Soit $A \in f^{-1}(\mathscr{B})$. Il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $A = f^{-1}(B)$. On a
   $$A^c = f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$
   (iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f^{-1}(\mathscr{B})$. Il existe $B_n \in \mathscr{B}$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in f^{-1}(\mathscr{B})$.

2. On remarque que $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathscr{C})$ donc

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})).$$

On définit
$$\mathscr{F} = \left\{ B \subset E \ ; \ f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)\right\}$$
et on montre qu'il s'agit d'une tribu sur E qui contient $\mathscr{C}$.

(i) $E \in \mathscr{F}$ puisque $f^{-1}(E) = \Omega \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)$

(ii) Soit $B \in \mathscr{F}$, on a $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)$ donc $B^c \in \mathscr{F}$.

(iii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}$

On observe ainsi que $\mathscr{F}$ est une tribu sur E contenant $\mathscr{C}$ et par consequent $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$. On observe alors que

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C})).$$

$\square$

Definition 22 (Tribu engendrée par f)

$f^{-1}(\mathscr{B})$ est la tribu engendrée par f. Il s'agit de la plus petite tribu $\mathscr{T}$ de Ω pour laquelle f est une application mesurable de $(\Omega,\mathscr{T})$ vers $(E,\mathscr{B})$.

Corollaire 1 (Caractérisation de la mesurabilité)

Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ vérifiant $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. Soit $f : (\Omega,\mathscr{A}) \mapsto (E,\mathscr{B})$ une application.

$$f \text{ est mesurable } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}.$$

<u>preuve:</u>

$\Rightarrow$ Supposons que f soit mesurable, alors $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$ découle de la définition de la mesurabilité.
$\Leftarrow$ Supposons que $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$ alors on a

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset \mathscr{A}$$

car $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$ et $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ est la plus petite tribu de Ω contenant $f^{-1}(\mathscr{C})$. Cela implique que f est mesurable.
$\square$

Proposition 11 (Mesurabilité de $g \circ f$)

La composée de deux fonctions mesurables est mesurable.

preuve:
Soit $(\Omega_i, \mathscr{A}_i), i = 1,2,3$ des espaces mesurables et $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \mapsto \Omega_3$. Pour tout $A_3 \in \mathscr{A}_3$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(A_3) = f^{-1}(g^{-1}(A_3))$$

avec $g^{-1}(A_3) \in \mathscr{A}_2$ puis $f^{-1}(g^{-1}(A_3)) \in \mathscr{A}_1$, ce qui permet de conclure que $(g \circ f)$ est mesurable.
$\square$

Theoreme 5 (μ_f)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ et $(E, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, et $f : (\Omega, \mathscr{A}) \mapsto (E, \mathscr{B})$ une application mesurable. A toute mesure μ sur $(\Omega, \mathscr{A})$ on peut associer une mesure μ_f sur $(E, \mathscr{B})$ définie par

$$\mu_f(B) = \mu\left[f^{-1}(B)\right], \ B \in \mathscr{B}.$$

preuve:
μ_f est à valeurs positives,comme μ. De plus,

$$\mu_f(\emptyset) = \mu\left[f^{-1}(\emptyset)\right] = \mu(\emptyset) = \emptyset.$$

Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements de $\mathscr{B}$ deux à deux disjoints. La suite d'évènements $\left\{f^{-1}(B_n)\right\}_{n\geq 0}$ est une suite d'évènements disjoints de $\mathscr{A}$. En effet, supposons l'existence de $\omega \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, alors $f(\omega) \in B_1$ et $f(\omega) \in B_2$ ce qui contredit l'hypothèse $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Par suite,

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\left[f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right)\right] = \mu\left[\bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(B_n)\right] = \sum_{n\geq 0} \mu\left[f^{-1}(B_n)\right] = \sum_{n\geq 0} \mu_f(B_n).$$

□

Definition 23 (Mesure image)

μ_f est appelée mesure image de μ par f.

Une application permet de passer d'un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ à un autre espace mesuré $(E, \mathscr{B}, \mu_f)$

Definition 24 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. La loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ est une mesure de probabilité définie par

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \ \forall B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Il s'agit de la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.

Corollaire 2 (Continuité et mesurabilité)

Soient que $(E_1,\mathscr{O}_1)$ *et* $(E_2,\mathscr{O}_2)$ *deux espaces topologiques et* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$ *leur tribu borélienne associée, et* $f : E_1 \mapsto E_2$ *une application. On a*

$$f \text{ est continue } \Rightarrow f \text{ est mesurable }.$$

preuve:
On note simplement que $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{B}_2$ et $\sigma(\mathscr{O}_2) \subset \mathscr{B}_2$ puis

$$f^{-1}(\mathscr{O}_2) \subset \mathscr{O}_1 \subset \mathscr{B}_1$$

f est mesurable d'après le corollaire 1.
$\square$

2. Produits d'espace mesurable

Soit Ω un ensemble, et $(E_i, \mathscr{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espace mesurable et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications

$$f_i : \Omega \mapsto (E_i, \mathscr{B}_i).$$

Definition 25

La tribu engendrée par la famille $(f_i)_{i\in I}$ est la plus petite tribu sur Ω pour laquelle les f_i sont mesurables.

Il s'agit de la plus petite tribu contenant $\left\{f_i^{-1}(B)\ ;\ i\in I,\ B\in\mathscr{B}_i\right\}$. On la notera $\mathscr{T}$.
Soit $g : (F, \mathscr{F}) \mapsto (\Omega, \mathscr{T})$.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathscr{T}) \arrow[r, "f_i"] & (E_i,\mathscr{B}_i) \\
(F,\mathscr{F}) \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_i\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

Theoreme 6

Une condition nécéssaire et suffisante pour que g soit mesurable est que, pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ soit mesurable.

preuve:
Si g est mesurable alors les composées $f_i \circ g$ sont mesurables puisque $\mathscr{T}$ rend les f_i mesurable.
Réciproquement, considérons

$$\mathscr{G} = \left\{ f_i^{-1}(B) \; ; \; i \in I \; , \; B \in \mathscr{B}_i \right\}$$

et supposons que pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ soit mesurable. Alors, pour tout $B \in \mathscr{B}_i$

$$(f_i \circ g)^{-1}(B) \in \mathscr{F}$$

puis

$$g^{-1}(f_i^{-1}(B)) \in \mathscr{F}$$

On en déduit que $g^{-1}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{F}$ et finalement

$$\sigma\left[g^{-1}(\mathscr{G})\right] = g^{-1}\left[\sigma(\mathscr{G})\right] = g^{-1}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{F}.$$

g est bien mesurable.
□

Soient $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables. On désigne par

$$p_1 : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \text{ et } p_2 : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2, \ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

les applications projections canoniques.

Definition 26

La tribu produit $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ est la tribu engendré par les applications p_1 et p_2, c'est à dire la plus petite tribu rendant mesurables les applications projections.

Proposition 12

Soit g une application définie sur un espace mesurable $(F, \mathscr{F})$, à valeur dans un espace produit $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que g soit mesurable est que

$$p_1 \circ g : (F, \mathscr{F}) \mapsto (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \text{ et } p_2 \circ g : (F, \mathscr{F}) \mapsto (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$$

soient mesurable.

Deux conséquences immédiates:

- Une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$ n'est rien d'autre qu'un couple d'applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.
- Une application de $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeur dans $(\mathbb{C}, \mathscr{B}_{\mathbb{C}})$ est mesurable si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ sont mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$

3. Propriétés des applications mesurables (numériques)

Soient f et g sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$

Proposition 13

1. $$f \text{ est mesurable } \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ \{f < a\} \in \mathscr{A}$$

   Valide aussi avec $\{f \leq a\}$, $\{f > a\}$, *et* $\{f \geq a\}$.

2. $$f, g \text{ mesurables } \Rightarrow \{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathscr{A}$$

preuve:

1. On remarque simplement que $\{f < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$

2. Soit $\omega \in \{f < g\}$ alors

$$\begin{aligned} f(\omega) < g(\omega) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{Q},\ f(\omega) < r < g(\omega) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{Q}\ \omega \in \{f < r\} \cap \{g > r\} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{g > r\} \end{aligned}$$

On en déduit que $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{g > r\} \in \mathscr{A}$. Les autres propriétés se déduisent des observations suivantes

$$\{f \leq g\} = \Omega / \{f > g\},\ \{f = g\} = \{f \geq g\} \cap \{f \leq g\} \text{ et } \{f \neq g\} = \Omega / \{f = g\}$$

□

Proposition 14 (Vecteur de fonctions mesurables)

$h : \omega \in \Omega \mapsto (f(\omega), g(\omega))$ *est une fonction mesurable de* $(\Omega, \mathscr{A})$*dans* $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$

preuve:
Soit $A \times B$ un pavé dans $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$h^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Comme $\sigma(A \times B) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ alors h est mesurable par application du corollaire 1. □

Proposition 15 (Opérations sur les fonctions mesurables)

1. *Les applications*
$$f+g;\ \alpha\times f,\ \text{avec } \alpha\in\mathbb{R};\ f\times g;$$
sont mesurables.
2. *Les applications*
$$\inf(f,g);\ \sup(f,g);\ f^+=\sup(f,0);\ f^+=\inf(f,0);\ |f|$$
sont mesurables.
3. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega,\mathscr{A})$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Si $\sup\limits_{n\geq 0} f_n$ et $\inf\limits_{n\geq 0} f_n$ sont finies alors*
$$\sup_{n\geq 0} f_n;\ \inf_{n\geq 0} f_n;\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n;\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n.$$
sont mesurables. En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=f$ alors f est mesurable.

preuve:

1. L'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\Psi(x,y) = x+y$ est continue donc mesurable. On remarque que l'application $f+g$ est la composée de $\Psi \circ h$, où $h : (x,y) \mapsto (f(x), g(x))$, ce qui la rend mesurable. Le raisonnement est similaire pour αf et fg.
2. On remarque simplement que $\{\sup(f,g) > a\} = f^{-1}([a,+\infty[) \cup g^{-1}([a,+\infty[) \in \mathscr{A}$. Le raisonnement est similaire pour $\inf(f,g)$, $\sup(f,0)$ et $\inf(f,0)$. On garde $|f|$ pour l'examen :).
3. Par définition $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} f_n$ qui est mesurable en vertu du point précédent. De même $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$. Enfin si f_n tend vers f alors

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n.$$

est mesurable.

A.1 Existence et unicité de la mesure de Lebesgue

Il est naturel de mesurer un intervalle de $\mathbb{R}$ par sa longueur ou une union d'intervalles disjoints par la somme de leur longueur respective.

Definition 27 ($\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$, application longueur)

L'application longueur $l : \mathscr{I}_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}_+$ définie par

$$l(]a,b[) = b - a, \text{ et } l(\emptyset) = 0.$$

L'objectif est de définir une application permettant de mesurer une partie quelconque de $\mathbb{R}$ ou pour être précis les ouverts de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}]-k, k[$ alors toute partie de $\mathbb{R}$ peut être recouverte. Cette application sera une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ coincidant avec l'application longueur sur les intervalles ouverts.

Theoreme 7 (Caratheodory)

Il existe une et une seule mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, notée λ, appelée mesure de Lebesgue, telle que

$$\lambda(]a,b[) = b - a, \text{ pour tout } -\infty < a < b < +\infty.$$

preuve (synthétique):

Existence:

Pour une partie $A \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ on introduit l'instrument de mesure suivant.

Definition 28 (Mesure extérieure de Lebesgue)

On appelle mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ l'application $\lambda^* : \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ définie, pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, par

$$\lambda^* = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} l(I_n) \ ; \ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}} \text{ et } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Proposition 16 (Propriétés de λ^*)

L'application λ^* vérifie les propriétés suivantes

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$
2. $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *pour* $A, B \subset \mathbb{R}$ *telles que* $A \subset B$ *(λ^* est monotone).*
3. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *alors*

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

   (λ^* est sous σ-additive)
4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $-\infty < a < b < +\infty$*.*

λ^* n'est pas σ-additive et n'est donc pas une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ On va montrer que λ^* est une mesure si on restreint l'application à $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Concrètement , on montre que λ^* est une mesure sur une tribu $\mathscr{L}$ qui englobe $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

Definition 29 (La tribu de Lebesgue $\mathscr{L}$)

Soit

$$\mathscr{L} = \left\{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\ ;\ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\right\}, \text{pour tout } A \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, appelé tribu de Lebesgue.

Proposition 17 (Propriétés de $\mathscr{L}$)

1. *$\mathscr{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$,*
2. $\lambda^*_{|\mathscr{L}} : \mathscr{L} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une mesure.*

Les membres de la tribu $\mathscr{L}$ réalisent un bon partage des parties de $\mathbb{R}$.
preuve:
Il est immédiat que $\mathbb{R} \in \mathscr{L}$ et que $\mathscr{L}$ est stable par passage au complémentaire. De même, on remarque que $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

Etape 1. On va montrer que $\mathscr{L}$ est stable par réunion finie et que λ^* vérifie, pour $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$,

$$\lambda^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i).$$

Soit $E_1, E_2 \subset \mathscr{L}$ et $E = E_1 \cup E_2$. On rappelle que $E \subset \mathscr{L}$ si

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

Nous savons que $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ du fait de la σ sous-additivé de λ^*. Notons que

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap E) &= \lambda^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \\ &= \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \\ &= \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c)] \\ &\leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2 \cap E_1^c). \end{aligned} \tag{3}$$

Comme $E_2 \subset \mathscr{L}$ et $A \cap E_1^c \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ alors

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E^c). \tag{4}$$

On a également

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c). \tag{5}$$

puisque $E_1 \subset \mathscr{L}$. En ré-injectant (4) et (5) dans l'inégalité (3), on obtient

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Supposons que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A \cap E) &= \lambda^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \\
&= \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \\
&= \lambda^*\{[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1\} + \lambda^*\{[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c\} \\
&= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2)
\end{aligned}$$

Les deux propriétés se généralisent pour une suite $(E_n)_{n=1,\ldots,n}$ par récurrence.

Etape 2.
Considérons $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Soit

$$F_0 = E_0 \text{ et } F_n = E_n | (E_n \cap \bigcup_{p=0}^{n-1} F_p)$$

de sorte que $F_0, F_1, \ldots$ appartienent à $\mathscr{L}$, soient disjoints, et vérifient $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &= \lambda^*(A \cap \bigcup_{p=0}^{n} F_p) + \lambda^*\left[A \cap \left(\bigcup_{p=0}^{n} F_p\right)^c\right] \\
&\geq \lambda^*(A \cap \bigcup_{p=0}^{n} F_p) + \lambda^*\left[A \cap E\right] \\
&\geq \sum_{p=0}^{n} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^*\left[A \cap E\right]
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &\geq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda(A \cap E^c) \\
&\geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c) \text{ sous } \sigma\text{-additivité.}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $E \subset \mathscr{L}$.

On montre maintenant que λ^* est bien une mesure sur $\mathscr{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Comme $\bigcup_{p=0}^n E_p \subset E$ alors

$$\begin{aligned}\lambda^*(A\cap E) &\geq \lambda\left(\bigcup_{p=0}^n A\cap E_p\right)\\ &= \sum_{p=0}^n \lambda(A\cap E_p).\end{aligned}$$

On obtient $\lambda^*(E) \geq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p)$ en choisissant $A = E$ puis en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$. De plus $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(E_p)$ en vertu de la sous σ-additivité. On a donc

$$\lambda^*(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p).$$

Pour montrer l'existence du théorème (7), il suffit de montrer que $]a, +\infty[\subset \mathscr{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ car dans ce cas $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}$ puisque $]a, +\infty[$ engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Soit $E =]a, +\infty[$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c). \tag{6}$$

D'après la définition de λ^*, il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}}$, telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\lambda^*(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) - \epsilon$. Comme

$$\begin{cases} A \cap E \subset & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap E, \\ A \cap E^c \subset & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap E^c, \end{cases}$$

alors la σ sous-additivité implique que

$$\begin{cases} \lambda^*(A \cap E) \leq & \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E), \\ \lambda^*(A \cap E^c) \leq & \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E^c). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E) + \lambda^*(I_n \cap E^c) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n), \end{aligned}$$

puis $\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \lambda^*(A) + \epsilon$, où ϵ peut être choisi arbitrairement petit. Finalement, $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ est une conséquence de la σ sous-additivité, ce qui permet de conclure à l'égalité (6).
Pour l'unicité, on montre que s'il existe une autre mesure m sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b - a$ alors elle coincide avec λ^*. La proposition suivante est dès lors très utile.

Proposition 18 (Condition suffisante pour l'égalité de deux mesures)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable et m, μ deux mesures sur $\mathscr{A}$. Supposons qu'il existe $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ tel

1. *$\mathscr{C}$ engendre $\mathscr{A}$*
2. *$\mathscr{C}$ est stable par intersection fini*
3. *Il existe $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}$ telle que $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$, et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.*
4. *$m(C) = \mu(C)$ pour tout $C \subset \mathscr{C}$*

On a alors $m = \mu$

La preuve se termine en appliquant la proposition (18), avec $\mathscr{C} = \{]a, b]\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. On vérifie que

- $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$
- $\mathscr{C}$ est stable par intersection
- Considérons la suite

$$F_n =]n, n+1],\ n \in \mathbb{Z}$$

  est dénombrable, disjointe et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n = \mathbb{R}$

- On a par continuité décroissante

$$\begin{array}{rcl} m(]a,b]) & = & \lim_{n\to+\infty} m(]a,b+\frac{1}{n}) \\ & = & \lim_{n\to+\infty} b-a+\frac{1}{n} \\ & = & b-a \\ & = & \lambda^*(]a,b]) \end{array}$$

On définit alors $\lambda := \lambda^*_{|\mathbb{B}(\mathbb{R})}$
En résumé,

$$\begin{array}{rcl} \lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ & \Rightarrow & \lambda^*_{|\mathscr{L}} : \mathscr{L} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ est une mesure} \\ & \Rightarrow & \lambda := \lambda^*_{\mathscr{B}(\mathbb{R})} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ est la seule mesure telle que } \lambda(]a,b[) = b-a \\ & \Rightarrow & \text{La mesure de Lebesgue} \end{array}$$

Références bibliographiques I

Mes notes se basent sur les documents suivants [1, 3, 2]

Michel Carbon.
Probabilités 1 et 2.
Note de cours ENSAI, 2009.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.

Jean-François Le Gall.
Intégration, probabilités et processus aléatoires.
Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.