Intégration L3 Actuariat

Chapitre II: Intégration

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
October 14, 2021

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous allons définir l'intégrale d'une fonction $f : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$.

I. Intégrale par rapport à une mesure

1. Intégrale des fonctions étagées positives

Le passage de la mesure d'un ensemble à la mesure d'une fonction (ou intégrale d'une fonction) procède d'une idée simple. Pour $A \subset \Omega$, on attribue la mesure $\mu(A)$ à la fonction indicatrice

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Definition 1 (Intégrale de la fonction indicatrice)

L'intégrale de la fonction $\mathbb{I}_A$ par rapport à μ est définie par

$$\int_\Omega \mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{I}_A(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega) = \mu(A)$$

Plus généralement, si $B \in \mathscr{A}$, l'intégrale de $f = \mathbb{I}_A$ sur B par rapport à μ est définie par

$$\int_B \mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{I}_B \mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{I}_B(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega) = \mu(A \cap B).$$

Definition 2 (Fonction étagées positives)

On appelle fonction étagée positive une fonction $f:\Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$f(\omega)=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega),$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de Ω de $\mathscr{A}$, et $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ des coefficients réels et positifs. On note $\mathscr{E}^+$ l'ensemble des applications étagées positives.

Definition 3 (Intégrale d'une fonction étagée positive)

Soit $f \in \mathscr{E}_+$, l'intégrale de f par rapport à μ est donnée par

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i),$$

L'intégrale de f sur $B \in \mathscr{A}$ par rapport à μ est donnée par

$$\int_B f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_B \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B),$$

Exemple 1 (Variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathscr{A}) \mapsto (E, \mathscr{P}(E))$ une variable aléatoire discrète, avec $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. X peut s'écrire

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}, \text{ avec } A_i = \{X = x_i\}.$$

On a

$$\int X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum x_i \mathbb{P}(A_i) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$$

Proposition 1

Soit $f, g \in \mathscr{E}^+$ *et* $\alpha > 0$.

1. $f + g \in \mathscr{E}^+$ *et*
$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$
2. $$\int (\alpha f)d\mu = \alpha \int f d\mu.$$
3. $$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

preuve:

1. Soient
$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ et } g=\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$
L'ensemble $\{A_i \cap B_j \; ; \; i=1,\ldots,n, \text{ et } j=1,\ldots,m\}$ forme une partition. On a donc
$$f+g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}.$$
puis
$$\begin{aligned}\int f+g\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(B_j)\\ &= \int f\mathrm{d}\mu+\int g\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
2. Immédiat
3. On note que $g-f\in\mathscr{E}^+$ puis on conclut en intégrant $g=f+(g-f)$.

□

Proposition 2 (Beppo-Lévi 1^{re} partie)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de $\mathscr{E}^+$ qui converge simplement vers $f \in \mathscr{E}^+$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

preuve:
On a

$$f_n \leq f \Rightarrow \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

donc $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu$. D'autre part, on pose $A_n = \{f_n \geq c \times f\}$, où $c \in]0,1[$. Comme la suite des f_n est croissante alors la suite des A_n est croissante pour l'inclusion et de réunion Ω. Comme $f \in \mathscr{E}^+$ alors $f = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$ et

$$\mathbb{1}_{A_n}.f = \sum_{i=1}^k b_i \mathbb{1}_{B_i \cap A_n}.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}.f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^k b_i \mu(A_n \cap B_i) = \sum_{i=1}^k b_i \mu(B_i) = \int f \mathrm{d}\mu$$

Comme $f_n \geq c.f.\mathbb{I}_{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq c. \lim_{n\to\infty} \int f.\mathbb{I}_{A_n} \mathrm{d}\mu = c. \int f \mathrm{d}\mu.$$

En choisissant c arbitrairement proche de 1, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathrm{d}\mu.$$

□

Le lien entre fonctions mesurables positives et étagées se concrétisent avec les résultat suivants. On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonction mesurables de Ω vers $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Theoreme 1

Toute fonction $f \in \mathscr{M}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonction de $\mathscr{E}_+$.

preuve:
Posons

$$f_n = n\mathbb{I}_{\{f\geq n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{I}_{\left\{\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}\right\}},\ n\geq 1.$$

Par exemple,

$$f_1 = \mathbb{I}_{\{f\geq 1\}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2}\leq f<1\right\}},\ n\geq 1.$$

et

$$f_2 = 2\mathbb{I}_{\{f\geq 2\}} + \frac{1}{4}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{4}\leq f<\frac{1}{2}\right\}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2}\leq f<\frac{3}{4}\right\}} + \ldots,\ n\geq 1.$$

Voici une visualisation, pour un $\omega\in\Omega$, on a $f(\omega)\in\mathbb{R}_+$ et

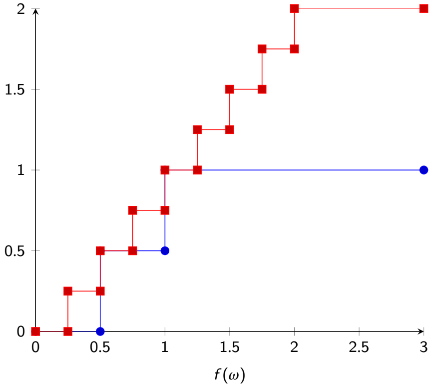

Figure: (bleu) f_1; (rouge) f_2

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions étagées positives.

- qui converge vers f. En effet,
  - Si $\omega \in \{f = +\infty\}$ alors $f(\omega) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

- Si $\omega \in \{f < +\infty\}$ alors pour $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$ et $f(x) < N$ donc pour $n \geq N$ il existe $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ pour lequel $\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}$. Par suite

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) = f(\omega) - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

- qui est croissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$
  - Si $f_n(\omega) = 0$ alors le résultat est trivial,
  - Si $f_n(\omega) > 0$ alors
    - Si $\omega \in \{f = \infty\}$ alors $f_n(\omega) = n < n+1 = f_{n+1}(\omega)$
    - Si $\omega \in \{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}$ pour un $k \in \{0, 1, 2, \dots, n2^n - 1\}$ alors

$$f_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \begin{cases} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \\ < \frac{2k+1}{2^{k+1}} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}. \end{cases}$$

$\square$

2. Intégrale des fonctions mesurables positives

L'introduction des fonctions étagées permet de définir l'intégrale d'une fonction $f \in \mathscr{M}_+$.

Definition 4 (Par les fonctions étagées positives)

L'intégrale d'une fonction $f \in \mathscr{M}_+$ par rapport à μ sur $B \subset \Omega$ est définie par

$$\int_B f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_B g \mathrm{d}\mu \ ; \ g \in \mathscr{E}^+ \ , \ g \leq f \right\}$$

Proposition 3

Soit $f \in \mathscr{M}^+$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{E}^+$, telle que $\lim h_n = f$. Alors

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int h_n d\mu.$$

preuve:

Par définition de $\int f \mathrm{d}\mu$, on a

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \int h_n \mathrm{d}\mu, \text{ pour tout } n > 0,$$

et en particulier $\int f d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu$. Soit $h \in \mathscr{E}^+$ telle que $h \leq f$. On définit

$$g_n = min(h_n, h),\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

On remarque que $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge vers h, donc d'après Beppo-Lévi

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int h d\mu$$

et ce pour tout $h \leq f$. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu \geq \sup\left\{\int h d\mu;\ h \in \mathscr{E}^+,\ h \leq f\right\} = \int f d\mu$$

□

Proposition 4

Soit $f, g \in \mathscr{M}_+$ et $a, b > 0$

1. $$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$
2. $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Preuve:

1. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ deux suites croissantes de $\mathscr{E}^+$ qui convrege respectivement vers f et g. On en déduit que la suite définie par $af_n + bg_n$ pour $n \geq 1$ converge vers $af + bg$. De plus, on a

$$\int (af_n + bg_n)\mathrm{d}\mu = a\int f_n \mathrm{d}\mu + b\int g_n \mathrm{d}\mu$$

ce qui est équivalent à

$$\int (af + bg)\mathrm{d}\mu = a\int f\mathrm{d}\mu + b\int g\mathrm{d}\mu$$

après passage à la limite.

2. Si $f \leq g$ alors $h \leq f \Rightarrow h \leq g$ pour toutes fonction $h \in \mathscr{E}^+$ et

$$\int f\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int h\mathrm{d}\mu;\ h \in \mathscr{E}^+, h \leq f\right\} \leq \sup\left\{\int h\mathrm{d}\mu;\ h \in \mathscr{E}^+, h \leq g\right\} = \int g\mathrm{d}\mu$$

□

Theoreme 2 (Beppo-Lévi)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement (μ-p.p.) vers f alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

preuve:
Soit $g \in \mathscr{E}^+$ telle que $f \geq g$, par exemple

$$g = \sum_{i\in I} \inf\{f(\omega)\ ;\ \omega \in A_i\}\mathbb{I}_{A_i},$$

où $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de Ω. Soit

$$E_n = \{f_n \geq \alpha g\},\ \ n \in \mathbb{N},$$

avec $\alpha \in [0,1]$. $(E_n)_{n\in N}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A}$. Comme $\lim f_n = f \geq \alpha g$ alors on peut trouver n assez grand tel que $\omega \in E_n$ et donc $\cup_{n\in N} E_n = \Omega$. On en déduit que $(\mathbb{I}_{E_n}\alpha g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonction étagées positives telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_{E_n}\alpha g = \alpha g$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int \mathbb{I}_{E_n}\alpha g \mathrm{d}\mu = \int \alpha g \mathrm{d}\mu,$$

par application de la Proposition 2. On a

$$f_n \geq f_n \mathbb{1}_{E_n} \geq \mathbb{1}_{E_n} \alpha g$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int \mathbb{1}_{E_n} \alpha g \mathrm{d}\mu = \alpha \int g \mathrm{d}\mu$$

On obtient

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathrm{d}\mu$$

en faisant tendre α vers 1 et en prenant le sup sur les fonction étagées positives.

Definition 5

Une propriété Π est vraie μ-presque partout si et seulement si l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ ; \ \Pi(\omega) \text{ est fausse}\}$ est μ-négligeable au sens où

$$\exists B \in \mathscr{A}, \ \{\omega \in \Omega \ ; \ \Pi(\omega) \text{ est fausse}\} \subset B \text{ et } \mu(B) = 0.$$

Exemple 2

Soit f et g deux applications mesurables. Dire que $f \leq g$ μ-presque partout est équivalent à

$$\mu(\{\omega \in \Omega \ ; \ \{f(\omega) > g(\omega)\}\}) = \mu(\{f > g\}) = 0$$

Proposition 5

Soit f une application mesurable à valeurs dans $\overline{R}^+$. Alors

$$\int f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

<u>preuve:</u>

$\Leftarrow$ Supposons que $f \in \mathscr{E}^+$ alors si $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = 0$ μ-pp, cela signifie que soit $\alpha_i = 0$ ou $\mu(A_i) = 0$ pour $i = 1, \dots k$ puis

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = 0.$$

Si $f \in \mathscr{M}^+$ alors f est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, nulles μ-pp. on a

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = 0$$

par Beppo-Lévi.
$\Rightarrow$ Supposons que $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{1}_{\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}} \leq n.f,$$

et

$$0 \leq \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \int \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \mathrm{d}\mu \leq n. \int f \mathrm{d}\mu = 0.$$

En remarquant que

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\},$$

puis $\mu(\{f \neq 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$.
$\square$

3. Intégrale des fonctions mesurables

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ et μ une mesure sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Pour tout $f \in \mathscr{M}$, on a

$$\{f \geq 0\}, \{f < 0\} \in \mathscr{A}$$

et

$$f^+ = \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}.f, \; f^- = -\mathbb{1}_{\{f<0\}}.f$$

sont des applications mesurables positives. Il ne faut pas oublier que

$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-.$$

On peut donc définir

$$\int f^+ \mathrm{d}\mu \text{ et } \int f^- \mathrm{d}\mu$$

et par suite introduire le concept de fonction μ-intégrable.

Definition 6 (Fonction intégrable)

Une application $f \in \mathcal{M}$ est μ-intégrable si et seulement si

$$\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty \text{ et } \int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$$

et on pose

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu.$$

On note $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 1 (Critère important)

$f \in \mathcal{M}$ est μ-intégrable si et seulement si $|\mathrm{f}|$ est μ-intégrable, avec

$$\int |f| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Proposition 6

$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace vecoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application $f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire.

Proposition 7

Soient $f, g \in \mathcal{M}$.

1. $$\left|\int g\, d\mu\right| \leq \int |g|\, d\mu$$
2. *Supposons que g soit μ−intégrable. Si $|f| \leq g$ alors f est μ-intégrable.*

preuve:

1. Inégalité triangulaire
2. On a $f^+ \leq g$ et $f^- < g$, ce qui implique que
$$\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty \text{ et } \int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$$
puis f est μ-intégrable

Exemple 3 (Intégration par rapport à la mesure de Dirac)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable, la mesure de Dirac en $x \in \Omega$ est définie par

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x), \text{ pour tout } A \in \mathscr{A}.$$

On veut montrer que toute fonction $f \in \mathscr{M}$ est δ_x-intégrable.
Pour une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, où $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω, on a

$$\int f \mathrm{d}\delta_x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_x(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) = f(x).$$

Pour une fonction mesurable positive, on peut définir une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonction étagées positives qui converge vers f alors

$$\int f \mathrm{d}\delta_x = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \mathrm{d}\delta_x = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Pour une application mesurable $f \in \mathscr{M}$, on écrit $f = f^+ - f^-$ et

$$\int f \mathrm{d}\delta_x = \int f^+ \mathrm{d}\delta_x - \int f^- \mathrm{d}\delta_x = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

cela prouve l'intégrabilité de f.

Exemple 4 (Intégration par rapport à la mesure de comptage)

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable, la mesure de comptage est donnée par

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{\omega_i}(A), \ A \in \mathscr{A}.$$

D'après l'exemple précedente, l'application $f \in \mathscr{M}$ est μ-intégrable si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f^+(\omega_i) < \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^-(\omega_i) < \infty$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f(\omega_i)| < \infty.$$

Il faut que la série de terme générale $(p_i f(\omega_i))_{i \geq 1}$ soit absolument convergente.

Proposition 8

Soit f une application mesurable, si $\mu(A) = 0$ alors

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

preuve:
On a $\{f.\mathbb{I}_A \neq 0\} \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Ainsi $f.\mathbb{I}_A = 0$ μ-p.p. ce qui implique $|f|.\mathbb{I}_A = 0$ μ-p.p. puis

$$\int |f|.\mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 0$$

Ce qui implique que

$$\int f^+.\mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 0 \text{ et } \int f^-.\mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 0$$

et finalement

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int f.\mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 0.$$

□

Proposition 9

Soient f et g deux applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, égales μ- presque partout. Si f est intégrable, alors g aussi et $\int f d\mu = \int g d\mu$.

preuve:
Soit $A = \{f \neq g\}$ alors

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \mathrm{d}\mu = \int_{A^c} g \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$$

Proposition 10

Toute application μ-intégrable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est finie μ-pp.

preuve:
On peut montrer que $|f|$ est finie, soit $M = \{|f| = \infty\}$. On note que

$$f \geq n.\mathbb{1}_M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

il vient alors

$$n\mu(M) \leq \int f \mathrm{d}\mu < \infty,$$

ce qui implique que $\mu(M) = 0$.

4. Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Nous avons vu qu'une application $f : (\Omega, \mathscr{A}) \mapsto (\mathbb{C}, \mathscr{B}_{\mathbb{C}})$ est mesurable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables.

Definition 7

f est dite intégrable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables et dans ce cas

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int \Re(f) \mathrm{d}\mu + i \int \Im(f) \mathrm{d}\mu.$$

On note

$$|f| = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}.$$

Proposition 11

$|f|$ est intégrable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables.

preuve:
On a $|\Re(f)| \leq |f|$ et $|\Im(f)| \leq |f|$ mais aussi $|f| \leq |\Re(f)| + |\Im(f)|$.

Proposition 12

L'ensemble $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ des fonctions à valeurs complexes intégrables est un espace vecoriel sur $\mathbb{C}$, et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire.

Proposition 13

Pour $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, *on a*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$$

preuve:

Posons $\int f \mathrm{d}\mu = re^{i\theta}$, on note que

$$\left|\int f \mathrm{d}\mu\right| = r = e^{-i\theta}\int f \mathrm{d}\mu = \int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu.$$

Or

$$\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu = \int \Re\left(e^{-i\theta} f\right)\mathrm{d}\mu + i\int \Im\left(e^{-i\theta} f\right)\mathrm{d}\mu$$

puis

$$\int \Im\left(e^{-i\theta} f\right)\mathrm{d}\mu = 0$$

On en déduit que

$$\left|\int f \mathrm{d}\mu\right| = \int \Re\left(e^{-i\theta} f\right)\mathrm{d}\mu \leq \int \left|e^{-i\theta} f\right|\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu.$$

II. Théorèmes de convergence

Lemme 1 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_+$, on a

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

preuve:
On pose $g_n = \inf\limits_{k\geq n} f_k$, pour $n\in\mathbb{N}$, ce qui définit une suite croissante de fonctions positives dont la limite est $\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n$, on a

$$f_n \geq g_n \Rightarrow \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int g_n \mathrm{d}\mu$$

d'où

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \varliminf_{n\to+\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu$$

puis par le théorème de Beppo-Lévi, il vient

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \lim \int g_n \mathrm{d}\mu = \int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Remarque 2 (Moyen Mnémotechnique)

Soit

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}, \text{ pour } n \geq 0,$$

alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$ et $\int f_n(x) d\lambda(x) = 1$ donc

$$0 = \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n d\lambda < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda = 1.$$

Exemple 5

Soit

$$f_n(x) = n \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{n^{1/3}}\right), \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } x \in]0,1[$$

On a $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = +\infty$ puis

$$+\infty = \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n d\lambda < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda$$

puis $\lim \int f_n d\mu = \infty$

Theoreme 3 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}$ *convergeant presque partout vers* f*, et telle qu'il existe une fonction* $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *vérifiant* $|f_n| \leq g$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f\, d\mu.$$

preuve:
Les fonctions f_n sont intégrables car dominées par g. Par suite, les fonctions $g+f_n$ et $g-f_n$ sont intégrables et positives: On peut leur appliquer le lemme de Fatou, ce qui donne

$$\int \underline{\lim}_{n\to+\infty}(g+f_n)\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int (g+f_n)\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int g\mathrm{d}\mu + \int \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu.$$

d'une part et

$$\int \underline{\lim}_{n\to+\infty}(g-f_n)\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int (g-f_n)\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int g\mathrm{d}\mu - \int \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu + \underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(-\int f_n\mathrm{d}\mu\right).$$

d'autre part. On en déduit que

$$\int f\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu \text{ et } \int f\mathrm{d}\mu \geq \overline{\lim}_{n\to+\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$$

puis

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \to \int f \mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Exemple 6

Soit

$$f_n(x) = \frac{\sin^n(x)}{x^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in]1, +\infty[.$$

On a $|f_n(x)| \leq g(x) = \frac{1}{x^2}$ intégrable. Soit $N = \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, pour $x \in]1, +\infty[/N$ on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, comme N est de mesure nulle alors on a convergence de (f_n) vers 0 λ presque partout. Puis par application du théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{]1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{]1,+\infty[} \lim_{n \to +\infty} f_n \mathrm{d}\lambda = 0.$$

III. Intégrale et série d'applications

Proposition 14 (Intégrale d'une série de fonctions mesurables positives)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathscr{M}_+$ *et soit* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. *Alors*

$$\int f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,d\mu.$$

preuve: examen.

Proposition 15

Supposons que pour tout ω, $(f_n(\omega))_{n\mathbb{N}^*}$ *soit une suite alternée tel que* $(|f_n(\omega)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *décroisse vers* 0. *Si* f_1 *est intégrable alors*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int f_n\,d\mu.$$

preuve: Par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge (Critère de convergence des série alternée). On a également

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leq |f_1|,\ \ n \geq 1.$$

On applique ensuite le théorème de convergence dominée sur la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
□

Proposition 16

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications intégrables qui vérifient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\int |f_n| d\mu < \infty.$$

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge μ-pp, sa somme f est intégrable et

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\int f_n d\mu.$$

preuve:
La suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonction mesurable positives, par application de la Proposition 14 on a

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\int |f_n| \mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n|$ est fini μ-p.p. (Proposition 10) et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est absolument convergente. Sa somme, f, vérifie

$$|f| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n|$$

et est donc intégrable. On vérifie également que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n|$$

puis il vient

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int f_n \mathrm{d}\mu,$$

par application du théorème de convergence dominée.

Proposition 17

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'applications mesurables dont la série converge μ-p.p., on a l'inégalité suivante

$$\int \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right| d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| d\mu$$

preuve:

Soit

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu = \infty$ et l'inégalité est vérifiée

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty$ alors comme $\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty$ et

$$\int \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right| \mathrm{d}\mu \leq \int \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu.$$

IV. Intégrale de Lebesgue et de Riemann

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \mapsto (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ mesurable. Nous allons examiner le lien netre intégrale de Riemann et de Lebesgue.

L'intégrale de Riemann étudie les fonctions continues sur un intervalle compact. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé $[a,b]$. Soit P une partition de $[a,b]$:$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. On pose

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \text{ et } s_p = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i,$$

où

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

f est intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partition P telle que

$$S_P - s_p < \epsilon.$$

Si f est Riemann intégrable alors $\inf_P S_P = \sup_P s_P$.

Soit f une application définie sur $[a,b[$, on dit que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente, pour tout $c < b$, l'intégrale $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et si $\lim_{c \to b} \int f(x)\mathrm{d}x$ existe. On note alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et on l'appelle intégrale impropre de Riemann. On procède de la même manière pour définir l'intégrale impropre sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Remarque 3 (Fonction Riemann intégrable mais pas Lebesgue intégrable)

Soit

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_1},$$

où $\mathbb{Q}_1$ désigne l'ensemble des nombres rationels dans $[0,1]$. f est Lebesgue intégrable, avec

$$\int f(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_1}(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \mu(\mathbb{Q}_1) = 0.$$

mais pas Riemann intégrable puisque

$$S_P = 1 \text{ et } s_P = 0,$$

pour toute partition P de $[0,1]$

Theoreme 4

Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$, et les deux intégrales coincident.

preuve:

Soit P une partition quelconque de $[a,b]$, on pose

$$g=\sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i[}+M_n \mathbb{1}_{[x_{n-1},x_n]} \text{ et } h=\sum_{i=1}^{n-1} m_i \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i[}+m_n \mathbb{1}_{[x_{n-1},x_n]}.$$

On note que g et h sont des fonctions étagées qui vérifient $h \leq f \leq g$ et

$$S_P=\int_{[a,b]} g\mathrm{d}\lambda \text{ et } s_P=\int_{[a,b]} h\mathrm{d}\lambda$$

si f est mesurable, alors $\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda$ existe et coincide avec $\int_a^b f\mathrm{d}\lambda=\sup_P s_P$.

Theoreme 5

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. Si $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors f est Lebesgue intégrable sur $]a,b[$ et les deux intégrales coincident.

preuve:
$\forall a,b,c,d$ tels que $-\infty \leq a < c < d < b \leq +\infty$, on a d'après le Théorème 4,

$$\int_{[c,d]} |f|\mathrm{d}\lambda=\int_c^d |f(x)|\mathrm{d}x<\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x<\infty$$

D'autre part, en vertu du théorème de Beppo-Lévi

$$\int_{[a,b]} |f| \mathrm{d}\lambda = \lim_{\substack{c \to a \\ d \to b}} \int_{[c,d]} |f| \mathrm{d}\lambda(x)$$

puis $\int_{[a,b]} |f| \mathrm{d}\lambda = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

Bibliographie

Mes notes se basent sur les documents suivants [1, 3, 2]

Michel Carbon.
Probabilités 1 et 2.
Note de cours ENSAI, 2009.

Olivier Garet and Aline Kurtzmann.
De l'intégration aux probabilités, volume 470.
Ellipses, 2011.

Jean-François Le Gall.
Intégration, probabilités et processus aléatoires.
Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.