TRIBUS, MESURES ET APPLICATIONS MESURABLES

Intégration L3– 2018
Pierre-O Goffard et C. Jahel

---

1. Soient $f : X \mapsto Y$, $A, A_i \subset X$, $B, B_i \subset Y$. Comparer (en précisant éventuellement si f est injective ou surjective)

   (a) $f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)$ et $\bigcup_j f^{-1}(B_j)$

   Solution: $f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(B_j)$, en effet on vérfie facilement que $f^{-1}(B_j) \subset f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)$. De plus si $x \in f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)$ alors $f(x) \in \bigcup_j B_j$, en particulier il existe j tel que $f(x) \in B_j$ et donc $x \in \bigcup_j f^{-1}(B_j)$.

   (b) $f^{-1}\left(\bigcap_j B_j\right)$ et $\bigcap_j f^{-1}(B_j)$

   Solution: $f^{-1}\left(\bigcap_j B_j\right) = \bigcap_j f^{-1}(B_j)$.

   (c) $f^{-1}(B^c)$ et $f^{-1}(B)^c$

   Solution: On a toujours $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$.

   (d) $f\left(\bigcup_j A_j\right)$ et $\bigcup_j f(A_j)$

   Solution: $f\left(\bigcup_j A_j\right) = \bigcup_j f(A_j)$

   (e) $f\left(\bigcap_j A_j\right)$ et $\bigcap_j f(A_j)$

   Solution: $f\left(\bigcap_j A_j\right) \subset \bigcap_j f(A_j)$, avec un contre exemple si f est constante et les A_j disjoints. On a égalité ssi f injective.

   (f) $f(A^c)$ et $f(A)^c$

   Solution: $f(A^c) \subset f(A)^c$ si f est injective. $f(A)^c \subset f(A^c)$ si f est surjective.

2. Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu.

   (a) Montrer qu'une tribu est stable par intersection finie.

   Solution: Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. On sait que $A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$ par propriété des tribus. On en déduit que $\cup_{i=1}^n A_i^c \in \mathcal{A}$ et puis $(\cup_{i=1}^n A_i^c)^c \in \mathcal{A}$. Comme $(\cup_{i=1}^n A_i^c)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$, on a le résultat.

   Remarque : On aurait en fait pu montrer qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.

   (b) Montrer que l'intersection quelconque de tribus de Ω est une tribu de Ω.

   Solution: On note $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ où les $\mathcal{A}_i$ sont des tribus sur Ω et I quelconque. Comme $\Omega \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$, on a $\Omega \in B$. De plus, si $A \in \mathcal{B}$, alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{A}_i$, et donc $A^c \in \mathcal{A}_i$ et $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{B}$. De même, soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, alors pour tout $i \in I$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_i$ et donc $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{B}$.

(c) $F \subset \Omega$. Montrer que $\mathcal{A}_F = \{A \cap F \ ; \ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F. On l'appelle tribu trace.

Solution: Comme $\Omega \in \mathcal{A}$, $F = F \cap \Omega \in \mathcal{A}_F$. Soit $A \in \mathcal{A}_F$, alors il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $A = B \cap F$, et $F \backslash A = B^c \cap F$ donc $F \backslash A \in \mathcal{A}_F$ puisque $B^c \in \mathcal{A}$. Enfin, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}_F$, alors il existe $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que $A_i = B_i \cap F$. On a $\cup_i A_i = \cup_i B_i \bigcap F$ et donc $\cup_i A_i \in \mathcal{A}_f$.

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ telles que $B_n \subset A_n$.

(a) Montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n).$$

Solution: Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, il existe $n_O \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$. Vu que $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on a en particulier $x \notin B_{n_0}$ et donc $x \in A_{n_0} \backslash B_{n_0} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n)$.

(b) Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(A_n) - \mu(B_n)].$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n)\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(A_n) - \mu(B_n)].
\end{aligned}$$

4. Les ensembles suivants sont-ils des tribus

(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \subset X \ ; \ A \text{ est fini}\}$

Solution: $\mathcal{F}_1$ est une tribu sur X ssi X est fini.

(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \subset X \ ; \ A \text{ est dénombrable}\}$

Solution: $\mathcal{F}_2$ est une tribu sur X ssi X est dénombrable.

(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \subset X \ ; \ A \text{ est dénombrable ou codénombrable dans } X\}$

Solution: $\mathcal{F}_3$ est une tribu

(d) $\mathcal{F}_4 = \{A \subset X \ ; \ A \text{ est fini ou cofini dans } X\}$

Solution: $\mathcal{F}_4$ est une tribu

(e) $\mathcal{F}_5 = \mathcal{P}(X)$

Solution: $\mathcal{F}_5$ est une tribu sur X

5. On considère $(X, \mathcal{T})$ un espace muni d'une tribu.

   (a) Soit $A \subset X$, montrer que 1_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{T}$.

   Solution: On note $\mathcal{C}$ la tribu de l'espace d'arrivée. On prend $B \in \mathcal{C}$, $(1_A)^{-1}(B) = \varnothing$ si $1 \notin B$ et $(1_A)^{-1}(B) = A$ sinon, d'où le résultat.

   (b) Soit $\mathcal{P}$ une partition au plus dénombrable de X qui engendre $\mathcal{T}$, et f une fonction réelle $\mathcal{T}$-mesurable, montrer que f est constante sur P pour tout $P \in \mathcal{P}$.

   Solution: On raisonne pas l'absurde, prenons $P \in \mathcal{P}$ sur lequel f n'est pas constante. On note x_1, x_2 deux valeurs telles que $\{x_1, x_2\} \subset f(P)$. On sait que $f^{-1}(x_1) \in \mathcal{T}$ et $f^{-1}(x_2) \in \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{P}$ est une partie dénombrable qui engendre la tribu, $f^{-1}(x_1)$ et $f^{-1}(x_2)$ sont des unions de parties de $\mathcal{P}$, or elle ont intersection non vide avec P, c'est impossible.

6. (a) L'inverse d'une application mesurable est elle mesurable ?

   Solution: Non, on peut en particulier considérer $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \{\varnothing, \mathbb{R}\})$ qui associe x à x.

   (b) Une application mesurable est elle continue ?

   Solution: Non, par exemple f tel que $F(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = 0$ sinon. On peut aussi considérer $1_{\mathbb{Q}}$.

   (c) Une application continue est elle mesurable ?

   Solution: Oui, pour la tribu borélienne.

7. (a) Soit $\mathcal{F} = \{]-\infty, x[\ , x \in \mathbb{Q}\}$, montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{F})$

   Solution:

   (b) A-t-on $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{\{x\}\ , x \in X\}\right)$

   Solution: Non, $\sigma\left(\{\{x\}\ , x \in X\}\right)$ ne contient que les ensembles dénombrables ou de complémentaire dénombrable.

8. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé, f une application $\mathcal{T}$-mesurable. On suppose que μ est f invariante, c'est à dire que pour tout $T \in \mathcal{T}$, on a $\mu(T) = \mu\left(f^{-1}(T)\right)$. On fixe $A \in \mathcal{T}$ et on considère $A' = \{x \in A \text{ tels que il existe une infinité de } n \in \mathbb{N} \text{ avec } f^n(x) \in A\}$.

   (a) Soit $n \geq 1$, on considère $B_n = \{x \in A \text{ tels que pour tout } f^n(x) \in A \text{ et } k > n,\ f^k(x) \notin A\}$. Montrer que $f^{-nk}(B_n)$ est disjoint de $f^{-nk'}(B_n)$ pour $k \neq k'$ des entiers naturels.

   Solution: Supposons $k < k$, soit $x \in f^{-nk}(B_n)$, $f^{nk}(x) \in B_n$, donc $f^{n(k'-k)+n}(f^{nk}(x)) \notin A$ et donc necessairement $x \notin f^{-nk'}(B_n)$.

(b) En utilisant la finitude de μ, montrer que $\mu(A) = \mu(A')$.

Solution: $f^{-1}(B_n) = B_{n+1}$, en particulier $\mu(B_i) = \mu(B_j)$ pour tout i, j et comme il en existe une infinité disjointe, on a $\mu(B_n) = 0$. De plus, $B = \cup_n B_n = A \backslash A'$ et donc $\mu(B) \leq \sum_n \mu(B_n)$, et necessairement $\mu(B) = 0 = \mu(A) - \mu(A')$.

9. Le but de cet exercice est de construire une partie non mesurable de $\mathbb{R}$. On considère R la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ "être à distance rationelle". Soit A un système de représentants des classes d'équivalences (l'existence d'une telle partie repose sur l'axiome du choix !). Montrer que A ne peut pas avoir de mesure pour la mesure de Lebesgue. Indication : raisonner par l'absurde et utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Solution: Supposons que A a une mesure, on remarque que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A + q$, donc $\lambda(A) > 0$. Par ailleurs $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A + q \subset [0, 2]$, ce qui signifie que $\lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A + q) \leq 2$ et donc $\lambda(A) = 0$.