THÉORÈMES D'INTÉGRATION

Intégration L3– 2020

Pierre-Olivier Goffard et Colin Jahel

---

1. On définit
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,\ x\in]0,\infty[$$
et
$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x,$$
où a et b sont strictement positifs.
   (a) Montrer que Γ est bien définie.
   (b) Montrer que Γ est dérivable et que
   $$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log(t)\mathrm{d}t.$$
   Nous n'utiliserons pas cette question dans la suite, mais elle sert à résoudre l'exercice à la fin des notes de cours.
   (c) Montrer que $B(a,b) = B(b,a)$ et que
   $$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\mathrm{d}\theta$$
   (d) Calculer $B(1/2,1/2)$ et $B(a,1)$.
   (e) Montrer que
   $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
   Indication : Regarder $\Gamma(a)\Gamma(b)$ comme une intégrable double et appliquer le changement de variable $(x,y)\mapsto(x,x+y)$.
   (f) En déduire que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, puis calculer $\Gamma(n)$ pour n un entier strictement positif.
   (g) En déduire $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution:

(a) Prenons $x\in]0,\infty[$, sur $]0,1]$, $0 < e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$ qui est integrable car $x-1>-1$, donc $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable. Sur $[1,+\infty[$, $0 < e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}$ qui est intégrable. Donc $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On note $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^{x-1}\log(t).$$

On remarque que pour $t \in [0,1]$, $|e^{-t}t^{x-1}\log(t)| \leq t^{x/2-1}$ car $|\log(t)| \leq t^{-x/2}$. Donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}log(t)$ est intégrable sur $[0,1]$. De plus, pour $t \in [1,+\infty[$, $e^{-t}t^{x-1}\log(t) \leq e^{-t/2}$ car $\log(t) \leq e^{t/2}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est dominée par une application intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc bien appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégale et on a le résultat.

(c) $B(a,b) = B(b,a)$ via le changement de variable $t \mapsto 1-t$. Pour la deuxième égalité, on applique le changement de variable $t \mapsto \sin^2(\theta)$, on a $\mathrm{d}t = 2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$, en applicant la formule de changement de varible, on a bien le résultat.

(d) $B(1/2,1/2) = \pi$.

$B(a,1) = 1/a$.

(e) On suit l'incation de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_x^{\infty} e^{-u}t^{a-1}(u-t)^{b-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}\left(\int_0^u t^{a1}(u-t)^{b-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $t \mapsto lu$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}\left(\int_0^1 l^{a-1}u^{a-1}u^{b-1}(1-l)^{b-1}u\mathrm{d}l\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}u^{a+b-1}\mathrm{d}u\int_0^1 l^{a-1}(1-l)^{b-1}\mathrm{d}l.\end{aligned}$$

(f) Conséquence de la question (d), on a vu que

$$B(a,1) = 1/a = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1)}{\Gamma(a+1)}.$$

Donc $\Gamma(a+1) = \Gamma(1)a\Gamma(a)$, De plus, si on remarque que $\Gamma(1) = 1$, on a bien le résultat. Une récurrence simple donne $\Gamma(n) = n!$.

(g) Conséquence de la question (d), on a vu que

$$B(1/2,1/2) = \pi = \frac{(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(1)},$$

donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

De plus $\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. En posant $u = \sqrt{t}$, on a $\Gamma(1/2) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$, d'où le résultat.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On note $G = \{(x,f(x)), x \in \mathbb{R}^d\}$ le graphe de f.

   (a) Montrer que $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$.

(b) Montrer que G est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Solution:

(a) On considère $g\colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = f(x) - y$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in R$. g est évidemment mesurable, et donc $G = g^{-1}(0)$ est bien mesurable.

(b) On calcule $\lambda_{d+1}(G)$ comme une intégrale :

$$\begin{aligned}
\lambda_{d+1}(G) &= \int_{R_+} \cdots \int_{R_+} 1_{(x_1,\ldots,x_{d+1})\in G} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{d+1} \\
&= \int_{R_+} \cdots \int_{R_+} \left(\int_{R_+} 1_{f(x_1,\ldots,x_d)=x_{d+1}} \mathrm{d}x_{d+1} \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d \\
&= \int_{R_+} \cdots \int_{R_+} \left(\int_{R_+} \lambda(\{f(x_1,\ldots,x_d)\}) \mathrm{d}x_{d+1} \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d \\
&= \int_{R_+} \cdots \int_{R_+} \left(\int_{R_+} 0) \mathrm{d}x_{d+1} \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. (a) Montrer que pour tout $z \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.

(b) En déduire que pour tout $y > 0$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty]$.

(c) On note, pour tout $y > 0$,

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}.$$

Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$ et calculer $F'(y)$.

(d) En déduire F à une constante près.

(e) En considérant $(F(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la constante.

Solution:

(a) L'inégalité de droite est évidente. On peut déduire l'inégalité de gauche en dérivant $z \mapsto 1 - e^{-z} - z$ et en l'évaluant en 0.

(b) Lorsque $x \in]0, 1]$, on a $\frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2} \leq y$, or $x \mapsto y$ est intégrable sur $[0, 1]$. Lorsque $x \in]1, \infty[$, $\frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, qui est intégrable.

(c) On note $f(x,y) = \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2 y}.$$

Si on prend $y_0 > 0$, on a pour tout $y > y_0$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq e^{-x^2 y_0}$$

qui est intégrable. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est dérivable sur $]y_0, \infty[$, donc elle l'est sur $]0, \infty[$. De plus, on a,

$$F'(y) = \int_0^\infty e^{-x^2 y} dx.$$

(d) On fait le changement de variable $u = x\sqrt{y}$ dans l'expression de F'. On a donc,

$$F'(y) = \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}u.$$

On rappelle que $\int_0^\infty e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc on a

$$F(y) = \sqrt{\pi y} + C$$

où C est une constante.

(e) On note $F(1/n) = \int_0^\infty f_n(x) \mathrm{d}x$, on a donc $f_n(x) = \frac{1-e^{-\frac{x^2}{n}}}{x^2}$, on remarque que $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus $f_n(x) \leq \inf(1, 1/x^2)$ donc par le théorème de convergence dominée, on a $F(1/n) \to 0$, en particulier $C = 0$.