EXAMEN FINAL

Modèles Aléatoires Discrets– 2019-2020
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	3	7	5	5	20
Score:					

1. Questions de cours. Processus de Poisson.
   (a) (1 point) Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, montrer que
   $$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),\ s, t > 0.$$
   (b) (1 point) Rappeler la définition d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$
   (c) (1 point) Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson, montrer que
   $$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k \geqslant 0.$$

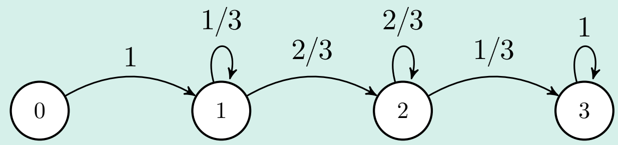
   Solution: Voir le cours.

2. On suppose qu'une playlist (pour aller courir) contient 3 chansons différentes. On définit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ égale au nombre de chansons différentes écoutées jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_0 = 0$.
   (a) (1 point) Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une chaine de Markov homogène. Donner son espace d'état, sa loi initiale, sa matrice des transitions et son graphe des transitions.

Solution: $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mu = (1, 0, 0, 0)$, La matrice des transitions est données par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le graph des transition



(b) (1 point) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle irréductible? Justifier.

Solution: L'espace d'état comprend 4 classes de communications dont

- $\{0\}$, $\{1\}$, et $\{2\}$ sont des classes ouvertes
- $\{3\}$ est une classe fermée.

La chaine n'est donc pas irréductible.

(c) (2 points) Discuter l'existence et l'unicité d'une loi stationnaire.

Solution: L'espace d'état est fini, il existe au moins une loi stationnaire. Celle ci est unique car on n'a qu'une seule classe fermée, la loi stationnaire est donnée par $\pi = (0, 0, 0, 1)$

(d) (1 point) On note $\tau_3 = \inf\{n \geqslant 0 \ ; \ X_n = 3\}$. τ_3 est-il un temps d'arrêt? Justifier.

Solution: On peut écrire

$$\{\tau_3 = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \neq 3\} \cap \{X_n = 3\} \in \mathcal{F}_n,$$

avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

(e) (2 points) En utilisant une analyse à un pas, donner $\mathbb{E}_0(\tau_3) := \mathbb{E}(\tau_3 | X_0 = 0)$.

Solution: On résout le système suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(\tau_3) &= 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3) && (1) \\ \mathbb{E}_1(\tau_3) &= 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3)/3 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 && (2) \\ \mathbb{E}_2(\tau_3) &= 1 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 && (3) \end{aligned}$$

On obtient $\mathbb{E}_2(\tau_3) = 3$, $\mathbb{E}_1(\tau_3) = 9/2$ et $\mathbb{E}_0(\tau_3) = 11/2$.

3. La vie de Pierre-O.

Nous allons géolocaliser Pierre-O heure par heure à l'aide d'une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Pierre-O peut se trouver dans 3 positions

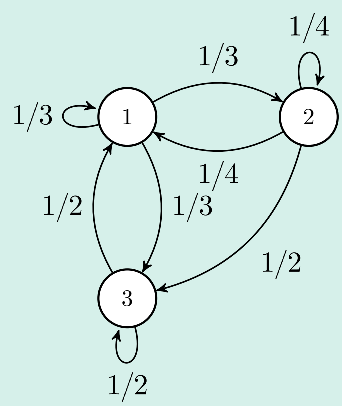
1. Maison
2. ISFA
3. Bar

On suppose qu'initialement il peut se trouver dans un de ces trois endroits de manière equiprobable. Ensuite ses déplacements suivent la dynamique suivante

- lorsqu'il est à la maison il peut rester à la maison, aller à l'ISFA ou aller ou bar de manière equiprobable
- lorsqu'il est à l'ISFA il va au bar dans 50% des cas, va à la maison dans 25% des cas, reste à l'ISFA dans 25% des cas
- lorsqu'il est au bar soit il reste au bar, soit il rentre à la maison de manière équiprobable.

(a) (1 point) Donner l'espace d'état, la loi initiale, le graph des transitions et la matrice des transitions de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution: L'espace d'état est donné par $E = \{1, 2, 3\}$, la loi initiale est $\mu = (1/3, 1/3, 1/3)$. Le graph des transitions est le suivant



La matrice des transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) (1 point) La chaine est-elle irréductible?

Solution: Oui, il n'y a qu'une seule classe de communication

(c) (1 point) Donner la période de chaque état

Solution: Tous les états sont dans la même classe de communication et ont donc même période, celle ci est égale à 1 car par exemple

$$d(1) = \text{pgcd}\{1, 2, \dots\} = 1$$

(d) (2 points) Après avoir justifié son existence et son unicité, donner la loi stationnaire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution: L'espace d'état est de dimension fini, la loi stationnaire existe. Comme la chaine est irréductible alors la loi stationaire est unique et solution de

$$\begin{cases} \pi.Q = \pi \\ \pi.\mathbf{1}_3 = 1 \end{cases}$$

On trouve $\pi = (9/23, 4/23, 10/23)$

4. L'objectif est de modéliser le temps d'attente à un guichet d'un guichet ouvert 24 heures sur 24. Les clients arrivent au guichet suivant un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité λ, l'unité de temps est l'heure. Le temps de service pour chaque client est une variable aléatoire X, positive, continue (à densité par rapport à la mesure de Lebesgue). Le temps d'occupation effectif du guichet est donné par un processus de Poisson composé défini par

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,\ t \geqslant 0.$$

où $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires distribuées comme X, indépendantes de $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Le temps d'attente d'un client arrivant à l'instant t est un processus donné par

$$R_t = (S_t - t)_+,\ t \geqslant 0$$

où $(x)_+ = \max(x, 0),\ x \in \mathbb{R}$ désigne la fonction partie positive.

(a) (1 point) Lors de la première journée qui démarre à $0:00$ heure, quelle est la probabilité d'avoir entre 2 et 4 clients entre $8:00$ et $11:00$. Donner le résultat en fonction de λ.

Solution: On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_11 - N_8 \in \{2,3,4\}) &= \mathbb{P}(N_3 = 2) + \mathbb{P}(N_3 = 3) + \mathbb{P}(N_3 = 4) \\ &= \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^2}{2!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^3}{3!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^4}{4!} \end{aligned}$$

(b) (2 points) Le temps de traitement de la demande d'un client suit une loi de Weibull $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$ de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) donnée par

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right),\ x > 0,\ \alpha, \beta > 0.$$

Calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \geqslant 1$. Donner le résultat en fonction de α, β et de la fonction gamma définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} \mathrm{d}x,\ \text{avec } z > 0.$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^k) &= \int_0^{+\infty} x^k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^k y^{k/\alpha} e^{-y} \mathrm{d}y \\ &= \beta^k \Gamma\left(1 + k/\alpha\right)\end{aligned}$$

(c) (1 point) Donner la moyenne et la variance de S_t pour un instant $t > 0$ en fonction de α, β et λ. Si vous n'êtes pas parvenu à résoudre la question précédente, vous pouvez noter $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Solution: On a

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = \lambda t \beta \Gamma(1 + 1/\alpha)$$

et

$$\mathrm{Var}(S_t) = t\lambda\beta^2\Gamma(1 + 2/\alpha)$$

(d) (1 point) On approche la distribution de $(S_t)_{t \geqslant 0}$ (approximation grossière) par une loi exponentielle de paramètre $1/\mathbb{E}(S_t)$ (L'atome de probabilité en 0 de S_t peut en particulier être négligé pour λ grand). En utilisant cette approximation, donner l'expression du temps d'attente moyen $\mathbb{E}(R_t)$ à l'instant $t \geqslant 0$ en fonction de λ, t, α, et β (à défaut μ si vous n'êtes pas parvenu à répondre à la question b).

Solution: On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(S_t - t)_+\right] &= \mathbb{E}\left[(S_t - t)\mathbb{I}_{S_t > t}\right] \\ &= \mathbb{E}\left(S_t \mathbb{I}_{S_t > t}\right) - t\mathbb{P}\left(S_t > t\right) \\ &= \lambda t \beta \Gamma(1 + 1/\alpha) \exp\left(-1/\lambda\beta\Gamma(1 + 1/\alpha)\right)\end{aligned}$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$