MAD M1 Actuariat/ES

Chapitre 0: Espérance conditionnelle

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
November 2, 2021

I. Définitions

1. Espérance conditionnelle par rapport à un évènement

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathscr{A}$ tel que

$$\mathbb{P}(B) > 0$$

La probabilité conditionnelle de $A \in \mathscr{A}$ sachant B est définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ $(\mathbb{E}(X) < \infty)$ sachant B correspond à l'espérance de X par rapport à la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$.

Definition 1

L'espérance conditionnelle de X sachant B est définie par

$$\mathbb{E}_B(X) = \mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

On peut vérifier la cohérence de la définition en montrant l'identité (1) sur les applications mesurables étagées positives, avant de généraliser au fonctions mesurables positives par passages à la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives

puis au fonction mesurable et intégrable par différence de fonctions mesurables positives.
En effet, si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}$, où les $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ forme une partition de Ω alors

$$\mathbb{E}(X|B) = \int_\Omega X \mathbb{P}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i \int \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mathbb{P}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_B \mathrm{d}\mathbb{P} = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 1

On peut introduire la loi $\mathbb{P}_{X|B}$ de X sachant B comme mesure image de $\mathbb{P}_B$ par Xavec

$$\mathbb{P}_{X|B}(U) = \mathbb{P}_B(X^{-1}(U)) = \mathbb{P}_B(X \in U)$$

- Si X est une v.a. discrète, on peut introduire sa fonction de masse conditionnellement à B avec

$$p_{X|B}(x) = \mathbb{P}(X = x|B), \text{ et } \mathbb{E}(X|B) = \sum_x x p_{X|B}(x)$$

- Si X est une v.a. continue, on peut introduire sa fonction de densité conditionnellement à B notée $f_{X|B}(x)$ et

$$\mathbb{E}(X|B) = \int x f_{X|B}(x) \mathrm{d}x$$

Exemple 1

Soit

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et } \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Soit $B =$" le dé retombe sur une face paire" et $X(\omega) = \omega$. On a

$$\mathbb{E}(X|B) = 4.$$

2. Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire discrète

Soit $Y : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire à valeur dans un ensemble dénombrable E, et $E' = \{y \in E \ ; \ \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$. Pour $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on peut définir comme cas particulier de ce qui précède

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{Y=y})}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

Definition 2

L'espérance de X sachant Y est définie comme la variable aléatoire réelle

$$\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y),$$

où $\varphi : E \mapsto \mathbb{R}$ est donnée par

$$\varphi(y) = \begin{cases} \mathbb{E}(X|Y = y), & \text{si } y \in E', \\ 0, & \text{si } y \in E/E' \end{cases}$$

L'espérance conditionnelle est une variable aléatoire égale à la valeur moyenne de X lorsqu'on connait Y avec

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y = y), \text{ si } Y(\omega) = y$$

$\mathbb{E}(X|Y)$ est une fonction de Y qui s'interprète comme la meilleur approximation de X lorsqu'on connaît Y.

Remarque 2

- Si X est une variable aléatoire discrète d'espace d'état F alors on peut définir la loi jointe du couple (X, Y) avec

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)$$

  où $p_{X|Y}$ désigne la loi conditionnelle de X sachant Y. On calcule l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ avec

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_{x \in F} x p_{X|Y}(x|y).$$

- Si X est une v.a. continue alors on peut définir la densité conditionelle $f_{X|Y}(x|y)$ de X sachant $Y = y$ qui vérifie $f_X(x) = \sum_{y \in E'} f_{X|Y(x|y)} p_Y(y)$. On calcule l'esprance conditionelle de X sachant $Y = y$ avec

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y) \mathrm{d}x.$$

Exemple 2

Soit

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et } \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Soient les variables aléatoires

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \text{ paire} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $X(\omega) = \omega$. Il vient

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y(\omega) = y) = \begin{cases} 4, & \text{si } Y(\omega) = 1, \\ 3, & \text{si } Y(\omega) = 0. \end{cases}$$

En effet, on a par exemple

$$p_{X|Y}(x|0) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } x \in \{1,3,5\}, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

et par suite

$$\mathbb{E}(X|Y = 0) = \sum_{x=1}^{6} x p_{X|Y}(x|0) = 3.$$

Exemple 3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeur dans $\{1,2\}$, avec loi jointe $p_{X,Y}$ donnée par

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(1,1) &= 0.5, & p_{X,Y}(1,2) &= 0.1 \\ p_{X,Y}(2,1) &= 0.1, & p_{X,Y}(2,2) &= 0.3 \end{aligned}$$

1. Donner la loi conditionelle of $X|Y=1$
2. Donner L'espérance conditionnelle de $X|Y=1$

Exemple 4

Soient $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ indépendantes. Donner l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2=n)$.

Proposition 1 (Loi de l'espérance totale)

Soit $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *et* Y *une variable aléatoire à valeur dans un ensemble dénombrable* E *avec* $\mathbb{P}(Y = y) > 0, \forall y \in E$. *on a*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)).$$

preuve:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_{y \in E} \mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in E} \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y=y})}{\mathbb{P}(Y = y)} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}\left(X \sum_{y \in E} \mathbb{1}_{Y=y}\right) = \mathbb{E}(X)$$

I. Espérance conditionnelle dans le cas général

1. Définition

Soit $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$.

Definition 3

Il existe une unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathscr{B})$ de $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B})\mathbb{1}_B), \text{ pour tout } B \in \mathscr{B}.$$

On a plus généralement pour tout $Z \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B})Z).$$

De plus, si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X|\mathscr{B}) \geq 0$

Remarque 3

Dans le cas particulier où $\mathscr{B} = \sigma(Y)$, on notera indifféremment

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|\mathscr{B})$$

Exemple 5

Soit $\Omega =]0,1]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{]0,1]}$ et $\mathbb{P}(d\omega) = d\omega$. Soit $X \in \mathscr{L}^1(]0,1], \mathscr{B}_{]0,1]}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{B}$ la tribu engendrée par les intervalles $B_i =]i/n, (i+1)/n]$, pour $i = 0, n-1$. Notons que

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{B_i}) = \int_{B_i} X \mathrm{d}P$$

Posons

$$x_i = n \cdot \int_{B_i} X \mathrm{d}P = n \cdot \int_{i/n}^{(i+1)/n} X(\omega) \mathrm{d}\omega, \text{ pour } i = 0, \dots, n-1$$

et $W = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{B_i}$. On observe que

$$\mathbb{E}(W \mathbb{1}_{B_i}) = x_i \mathbb{P}(B_i) = \frac{x_i}{n} = \int_{B_i} X \mathrm{d}P = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{B_i}), \text{ pour tout } i = 0, \dots, n-1.$$

On en déduit que $\mathbb{E}(X|\mathscr{B}) = W$.

2. Propriétés

Proposition 2

1. *Si X est $\mathscr{B}$ mesurable alors*
$$\mathbb{E}(X|\mathscr{B}) = X$$
2. *L'application $X \mapsto \mathbb{E}(X|\mathscr{B})$ est linéaire.*
3. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathscr{B})] = \mathbb{E}(X)$
4. $X \geq X' \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathscr{B}) \geq \mathbb{E}(X'|\mathscr{B})$

preuve:

1. Résulte de l'unicité de l'espérance conditionnelle
2. Soit $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $X, X' \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, alors
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\alpha X + \alpha' X')\mathbb{1}_B] &= \alpha\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B) + \alpha'\mathbb{E}(X'\mathbb{1}_B) \\ &= \alpha\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B})\mathbb{1}_B) + \alpha'\mathbb{E}(\mathbb{E}(X'|\mathscr{B})\mathbb{1}_B) \\ &= \mathbb{E}((\alpha\mathbb{E}(X|\mathscr{B}) + \alpha'\mathbb{E}(X'|\mathscr{B}))\mathbb{1}_B) \end{aligned}$$
3. On observe simplement que
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_\Omega) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B})\mathbb{1}_\Omega) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B}))$$

4. Si $X \geq X'$ alors pour tout $B \in \mathscr{B}$

$$X - X' \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}((X - X')|\mathscr{B}) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathscr{B}) \geq \mathbb{E}(X'|\mathscr{B})$$

par linéarité.

Proposition 3

Soient $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et Y une variable aléatoire $\mathscr{B}$ alors

$$\mathbb{E}(YX|\mathscr{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathscr{B}).$$

Proposition 4

Soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ deux sous tribus de $\mathscr{A}$ telles que $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$ alors

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{B}_2)|\mathscr{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathscr{B}_1).$$

Theoreme 1

Soit $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ $(\mathbb{E}(X^2) < \infty)$, l'espérance conditionelle de X sachant $\mathscr{B}$ est la projection orthogonale de X sur l'espace $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$

Remarque 4 (Interprétation de l'espérance conditionnelle)

- Soit Y une variable aléatoire et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur de covariable, alors

$$\mathbb{E}(Y|X_1, \ldots, X_n) = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$$

est appelée fonction de régression, dans le cadre de la regression linéaire

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i.$$

- Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique alors

$$\mathbb{E}(X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t) = \varphi(X_1, \ldots, X_t)$$

est la meilleur prévision de X_{t+1} la valeur futur du processus sachant les valeurs passées.

Exemple 6

Soient X, Y_1 et Y_2 v.a. telles que

$$\mathbb{E}(Y|X_1,X_2) = 5X_1 + X_1X_2 \text{ et } \mathbb{E}(Y^2|X_1,X_2) = 25X_1^2X_2^2 + 15$$

Calculer $\mathbb{E}\left[(X_1Y + X_2)^2 \,|X_1,X_2\right]$

3. Espérance conditionellement à une variable aléatoire continue

Soient X et Y deux v.a. continues alors le couple (X, Y) admet une densité jointe $f_{X,Y}$. On peut retrouver les densités marginale en intégrant, par exemple

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y.$$

Soient $h, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux applications mesurables, on souhaite calculer $\mathbb{E}[h(X)|Y]$. On considère

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)g(Y)] &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x)g(y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} h(x)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\right) g(y)f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)g(y)f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \mathbb{E}[\varphi(Y)g(Y)]
\end{aligned}$$

On identifie alors $\mathbb{E}(h(X)|Y) = \varphi(Y)$, en effet

$$\mathbb{E}[h(X)g(Y)] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[h(X)g(Y)|Y]\} = \mathbb{E}\{g(Y)\mathbb{E}[h(X)|Y]\}.$$

On écrit abusivement, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[h(X)|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

et on définit la densité conditionnelle de $X|Y$ par

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Exemple 7

Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}(x+2y), & x,y \in [0,2], \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la densité conditionnelle de $X|Y = y$ pour tout $y \in [0,2]$
2. Donner l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y = y)$ pour tout $y \in [0,2]$

Exemple 8

Soient X et Y deux v.a. continues de densité jointe donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner l'espérance conditionnelle de $E(X|Y = y)$

Remarque 5

Soit $A \in \mathscr{A}$, par analogie avec la formule $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A)$, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A|\mathscr{B}) := \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathscr{B})$$

en gardant en tête que $\mathbb{P}(A|\mathscr{B})$ est une variable aléatoire! Cela permert l'étude de la loi d'une v.a. discrète qui dépend d'une v.a. continue. Soit N une variable aléatoire de comptage (à valeur entière) et X une v.a. continue de densité f_X. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=n) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{N=n}) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{N=n}|Y)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(N=n|Y)] \\
&= \int \mathbb{P}(N=n|Y=y)f_Y(y).
\end{aligned}$$

Exemple 9

Soient $\Lambda \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ de densité

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{e^{-\lambda/\beta}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, \ \lambda > 0.$$

On suppose que $N \sim \text{Pois}(\Lambda)$, donner la loi de probabilité de N.

Mes notes se basent sur les documents [4, 2, 1, 3].

Maryann Hohn.
PSTAT160A: Applied Stochastic Processes - Lecture notes.
2017.

Nabil Kazi-Tani.
Modèles aléatoires discrets - Cours scannés ISFA.
2017.

Jean-François Le Gall.
Intégration, probabilités et processus aléatoires.
Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.

Lionel Truquet.
Statistique des processus 3A - Note de cours.
http://www.ensai.fr/files/_media/documents/Enseignants%20chercheurs%20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf.