MAD M1 Actuariat/ES

Chapitre II: Chaine de Markov

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
March 18, 2022

I. Définitions et premieres propriétés

1. Chaine de Markov homogène et matrice stochastique

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique, à valeurs dans un espace d'état fini ou dénombrable E.

Exemple 1 (A propos de l'espace d'état)

E peut-être

- $\{a,b,c,d\}$
- $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$

Definition 1 (Chaine de Markov)

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov si

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n,\dots,X_1=x_1,X_0=x_0)=\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n),$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $(x_0,x_1,\dots,x_{n+1})\in E^{n+2}$ tel que

$$\mathbb{P}(X_n=x_n,\dots,X_1=x_1,X_0=x_0)>0.$$

La loi conditionnelle de la valeur future X_{n+1} du processus ne dépend pas de tout le passé $X_0,\dots,X_n$ mais simplement de la valeur présente X_n. Il s'agit de la propriété de Markov. Nous étudierons dans ce cours principalement dans ce cours des chaines de

Markov homogène pour lesquelles les probabilités de transition d'un état $X_n = x_n \in E$ vers un état $X_{n+1} = x_{n+1}$ ne dépendront pas de l'instant $n \in \mathbb{N}$ considéré. On pourra caractériser la loi du processus via sa loi initiale

$$\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x), \text{ pour } x \in E \text{ (loi de } X_0).$$

qui vérifie $\sum_{x \in E} \mu(x) = 1$ et sa matrice de transition Q de terme générale

$$Q(x,y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } (x,y) \in E^2.$$

Pour une chaine de Markov non-homogène nous introduirions une suite de matrice de transition $(\mathrm{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indicée sur le temps.

Definition 2 (Matrice stochastique et chaine de Markov homogène)

1. Une matrice $(Q(x,y))_{(x,y)\in E^2}$ est dite stochastique si

$$\begin{cases} Q(x,y) \geq 0, & (x,y) \in \mathbb{E}^2 \\ \sum_{y\in E} Q(x,y) = 1, & x \in \mathbb{E} \end{cases}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

2. Une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est homogène si

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) = Q(x,y), \text{ pour tout } (n,x,y) \in \mathbb{N} \times E^2.$$

Les probabilités de transitions sont dites stationnaires, et la matrice $(Q(x,y))_{(x,y)\in E^2}$ est appelée matrice de transtion.

La notion de matrice stochastique est équivalente a la notion de probabilité de transition (noyau de transition) de E dans E, avec

$$\nu(x,A) = \sum_{y\in A} Q(x,y), \; x \in E, A \subset E.$$

Inversement, on a $Q(x,y) = \nu(x,\{y\})$.

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène de loi initiale μ et de matrice de transition Q*. On a*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0)Q(x_0,x_1)\ldots Q(x_{n-1},x_n).$$

En particulier, on a (sous réserve que $\mathbb{P}(X_0 = x_0) > 0$),

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) = Q^n(x_0,x_n),$$

où $Q^n(x_0,x_n)$ est le terme générale de la matrice Q^n*, et*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = \boldsymbol{\mu} Q^n(\;.\;,x_n),$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est un vecteur ligne donnant les probabilités de la loi initiale et $Q^n(\;.\;,x_n)$ est le vecteur colonne de la matrice Q^n donnant les probabilité de transition vers l'état x_n.

preuve:
On conditionne en cascade avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1} \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&\times \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&\times \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&= Q(x_{n-1}, x_n) P(X_{n-1} = x_{n-1} \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&\vdots \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \\
&= \mu(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, on conditionne par rapport à tout les chemins possibles menant de x_0 à x_n en n étapes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \\
&= Q^n(x_0, x_n).
\end{aligned}$$

Pour la dernière assertion, on conditionne par rapport aux valeurs possibles de l'état initial

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x_n) &= \sum_{x_0 \in E} \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_0 \in E} \mu(x_0) Q^n(x_0, x_n) \\ &= \boldsymbol{\mu} Q^n(\ . \ , x_n)\end{aligned}$$

Exemple 2 (Espace d'état fini)

Une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace d'état fini $E = \{1,\ldots,K\}$ l'espace d'état (fini) est entièrement déterminée par la donnée de

- sa loi initiale $\mu(.)$
- sa matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} Q(1,1) & \ldots & Q(1,K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(K,1) & \ldots & Q(K,K) \end{pmatrix}$$

On associe souvent à la matrice de transition d'une chaine de Markov (homogène, sur un espace d'état fini) un graphe étiqueté et orienté.

Exemple 3 ((La chaine météo))

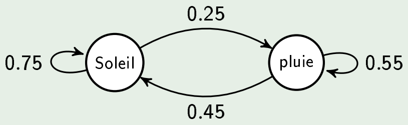
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à valeur dans l'espace d'état {soleil, pluie} indiquant le temps qu'il fait heure par heure. On suppose que

- S'il fait beau maintenant alors on est sur qu'il fait beau l'heure d'après à 75%
- S'il pleut maintenant alors on est sur qu'il pleut l'heure d'après à 45%

La matrice de transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$$

et le graphe associé est



Exemple 4 (La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire i.i.d. distribuées comme ξ de loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p.$$

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \text{ pour } n \geq 1, \text{ avec } x_0 \in \mathbb{Z},$$

est une chaine de Markov homogène de matrice de transition

$$Q(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 5

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires iid sur E de loi μalors

$$Q(x,y) = \mu(y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

2. Propriété de Markov simple

Proposition 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène de matrice de transition Q *et $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On a*

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_n) := \mathrm{Q}f(X_n).$$

preuve:
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n) &= \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}(X_{n+1}=y|X_0,\ldots,X_n) \\
&= \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}(X_{n+1}=y|X_n) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_n) \\ \sum_{y\in E} Q(X_n,y)f(y) & := \mathrm{Q}f(X_n) \end{cases}
\end{aligned}$$

Proposition 3 (Protocole générateur de chaine de Markov)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d.,

- *à valeur dans un ensemble G,*
- *distribuées comme U,*
- *indépendantes de X_0,*

et une application $F : E \times G \mapsto E$ mesurable. Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$$

est une chaine de Markov homogène.

preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$. Posons $A_n = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | A_n) &= \mathbb{P}[F(X_n, U_{n+1})) = x_{n+1} | A_n] \\
&= \mathbb{P}[F(x_n, U_{n+1})) = x_{n+1} | A_n] \\
&= \mathbb{P}[F(x_n, U_{n+1})) = x_{n+1}] \\
&= \mathbb{P}[F(x_n, U)) = x_{n+1}].
\end{aligned}$$

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène de matrice de transition

$$Q(x,y)=\mathbb{P}(F(x,U)=y),\ \forall (x,y)\in E^2.$$

□

Exemple 6 (Inventaire)

Entre deux instants, une usine fabrique $q \in \mathbb{N}^*$ pièces. Les clients achètes D_{n+1} entre les instants n et $n+1$. On suppose que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d. On note

$$X_{n+1} = max(X_n + q - D_{n+1}, 0) = F(X_n, D_{n+1}), \ n \in \mathbb{N}.$$

le nombre de pièces en stock. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène de transition

$$\begin{cases} Q(x,0) = \mathbb{P}(D_1 \geq x+q), \\ Q(x,y) = \mathbb{P}(D_1 = x+q-y), \quad 0 < y < x+q. \end{cases}$$

Exemple 7 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$)

Soient $X_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ des variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ de loi μ. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est définit par

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k = X_{n-1} + \xi_n = F(X_{n-1}, \xi_n).$$

Il s'agit d'une chaine de Markov homogène dont la matrice de transition vérifie

$$Q(x,y) = \mu(y-x), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbb{P}(X_n + \xi_{n+1} = y | X_n = x) \\ &= \mathbb{P}(x + \xi_{n+1} = y) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = y - x) = \mu(y-x). \end{aligned}$$

3. Propriétés de Markov forte

Definition 3 (Filtration)

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}$ telle que $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$

Exemple 8

La filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ est la filtration naturelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce sont les tribus engendré par toutes les trajectoires passées de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4 (Temps d'arrêt)

Un temps d'arrêt $\tau : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une variable aléatoire telle que $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple 9

L'instant

$$T_x = \inf\{n \geq 0 \ , \ X_n = x\}, \text{ pour } x \in E,$$

qui correspond au temps d'atteinte de l'état x est un temps d'arrêt. On peut écrire

$$\{T_x = k\} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \{X_j \neq x\} \cap \{X_k = x\}.$$

On note $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$ la mesure de probabilité et l'espérance conditionellement à l'évènement $\{X_0 = x\}$, soit

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = X) \text{ et } \mathbb{E}_x(X_n) = \mathbb{E}(X_n | X_0 = x).$$

Theoreme 1 (Propriété de Markov forte)

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une chaine de Markov homogène et τ un $\mathscr{F}_n$-temps d'arrêt alors, conditionellement à l'évènement $\{\tau < \infty\}$, le processus $(\widehat{X}_n = X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène de loi initiale $\widehat{\mu} \overset{\mathscr{D}}{=} X_\tau$ et de même probabilités de transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

preuve:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x, x_1, \ldots, x_p) \in E^{p+1}$. On a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x_1, \ldots, X_{\tau+p} = x_p | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x_1, \ldots, X_{\tau+p} = x_p, \tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+p} = x_p, \tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+p} = x_p | \tau = k, X_\tau = x, \tau < \infty) \mathbb{P}(\tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+p} = x_p | \tau = k, X_\tau = x, \tau < \infty) \mathbb{P}(\tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+p} = x_p | \tau = k, X_k = x, \tau < \infty) \mathbb{P}(\tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_p = x_p) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k | X_\tau = x, \tau < \infty) \\
= & \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_p = x_p)
\end{aligned}$$

□

Proposition 4 (Analyse à un pas)

Soit $\tau_A = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n \in A\}$, *avec* $A \subset E$ *tel que* $\mathbb{E}_x(\tau_A) < \infty$ *pour tout* $x \in E$. *Soit* $x \in E$ *et* $n \geq 1$, *alors*

1. $$\mathbb{P}_x(\tau_A = n) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ \sum_{y \in E} Q(x,y) \mathbb{P}_y(\tau_A = n-1), & x \notin A. \end{cases}$$

2. $$\mathbb{E}_x(\tau_A) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1 + \sum_{y \in E} Q(x,y) \mathbb{E}_y(\tau_A), & x \notin A. \end{cases}$$

preuve:

1. Si $x \in A$ alors $\tau_A = 0$ $\mathbb{P}_x$-p.s. donc $\mathbb{P}_x(\tau_A = n) = 0$ pour $n \geq 1$ et $\mathbb{P}_x(\tau_A = 0) = 1$. Supposons $n = 1$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_A = 1) &= \mathbb{P}(\tau_A = 1 | X_0 = x) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{P}(\tau_A = 1, X_1 = y | X_0 = x) \\
&= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(\tau_A = 1, | X_1 = y, X_0 = x) Q(x,y) \\
&+ \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}(\tau_A = 1 | X_1 = y, X_0 = x) Q(x,y) \\
&= \sum_{y \in A} 1 \times Q(x,y) + 0.
\end{aligned}$$

On remplace 1 par $\mathbb{P}_y(\tau_A = 0)$ (=1 si $y \in A$), il vient

$$\mathbb{P}_x(\tau_A = 1) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}_y(\tau_A = 0) \times Q(x,y)$$

quite à ajouter 0 on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_A = 1) &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}_y(\tau_A = 0) \times Q(x,y) + 0 \\
&= \sum_{y \in A} \mathbb{P}_y(\tau_A = 0) \times Q(x,y) \\
&+ \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}_y(\tau_A = 0) \times Q(x,y)
\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{P}_y(\tau_A = 0) = 0$ si $y \in E/A$. On vérifie bien que

$$\mathbb{P}_x(\tau_A = n) = \sum_{y \in E} Q(x,y)\mathbb{P}_y(\tau_A = n-1) \text{ pour } n = 1.$$

Supposons $n > 1$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_A = n) &= \mathbb{P}(\tau_A = n | X_0 = x) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{P}(\tau_A = n, X_1 = y | X_0 = x) \\
&= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(\tau_A = n | X_1 = y, X_0 = x) Q(x,y) \\
&+ \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}(\tau_A = n | X_1 = y, X_0 = x) Q(x,y) \\
&= 0 + \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}(\tau_A = n | X_1 = y, X_0 = x) Q(x,y) \\
&= \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} | X_1 = y, X_0 = x \right) Q(x,y)
\end{aligned}$$

Sachant $\{X_0 = x\}$ l'évènement $\{X_0 \notin A\}$ est presque sûr. On a donc

$$\mathbb{P}_x(\tau_A = n) = \sum_{y \in E/A} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} | X_1 = y \right) Q(x,y)$$

On perd le conditionnement par rapport à X_0 car sachant X_1

$$\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} \text{ est indépendant de } X_0.$$

Puis on remarque que comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une CMH alors

$$[(X_1, X_2, \dots, X_n) | X_1 = y] \overset{\mathscr{D}}{=} [(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) | X_0 = y].$$

Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_A = n) &= \sum_{y\in E/A} \mathbb{P}_y\left(\bigcap_{i=0}^{n-2}\{X_i \notin A\} \cap \{X_{n-1} \in A\}\right) Q(x,y) \\
&= \sum_{y\in E/A} \mathbb{P}_y(\tau_A = n-1)\, Q(x,y) + 0 \\
&= \sum_{y\in E} \mathbb{P}_y(\tau_A = n-1)\, Q(x,y).
\end{aligned}$$

2. Si $x \in A$ alors $\mathbb{E}_x(\tau_A) = 0$ et sinon

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(\tau_A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}_x(\tau_A = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y(\tau_A = n-1) Q(x,y) \\
&= \sum_{y \in E} Q(x,y) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathbb{P}_y(\tau_A = n) \\
&= \sum_{y \in E} Q(x,y)(1 + \mathbb{E}_y(\tau_A)) \\
&= 1 + \sum_{y \in E} Q(x,y) \mathbb{E}_y(\tau_A).
\end{aligned}$$

□

Exemple 10

On lance une pièce jusqu'à obtenir face deux fois de suite. On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de face consécutifs.

1. Donner l'espace d'état, la matrice de transition et le graph.
2. Donner le nombre moyen de lancer nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs.

Exemple 11

Soit $\{X_t\ ;\ t \in \mathbb{N}\}$ une chaine de Markov homogène d'espace d'état $\{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 1/10 & 6/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $A = \{1,4\}$, donner $\mathbb{E}_x(\tau_A)$ pour $x \in E$
2. On définit

   F='Absorption dans l'état 4'

   et

   $G =$ "L'état 2 est visité juste avant l'absorbtion"

   Calculer $\mathbb{P}_x(F)$ et $\mathbb{P}_x(G)$ pour $x \in \{1,2,3,4\}$.

Solution:

1. On a $\mathbb{E}_1(\tau_A) = \mathbb{E}_4(\tau_A) = 0$ et on résout le système

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0(\tau_A) = 1 + \frac{3}{10}\mathbb{E}_0(\tau_A) + \frac{5}{10}\mathbb{E}_2(\tau_A) \\ \mathbb{E}_2(\tau_A) = 1 + \frac{1}{10}\mathbb{E}_0(\tau_A) + \frac{6}{10}\mathbb{E}_2(\tau_A) \end{cases}$$

2. On a $\mathbb{P}_1(F) = 0$ et $\mathbb{P}_4(F) = 1$. On note que pour $x \in \{1,2\}$, on a

$$\mathbb{P}_x(F) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y(F) Q(x,y).$$

   On résout donc le sytème

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0(F) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathbb{P}_0(F) + \frac{5}{10}\mathbb{P}_2(F) \\ \mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\mathbb{P}_0(F) + \frac{6}{10}\mathbb{P}_2(F). \end{cases}$$

   On effectue le même raisonnement pour $\mathbb{P}_x(G)$.

Exemple Python!

III. Irréductibilité, périodicité, transience, et récurrence

1. Etats accessibles, communiquants, classes ouvertes/fermées, chaine irréductible

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition Q.

Definition 5 ($x \rightsquigarrow y$)

L'état $y \in E$ est accessible depuis l'état $x \in E$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$Q^n(x,y) > 0.$$

Proposition 5 (La relation d'accessibilité)

Soient $x, y, z \in E$,

- $x \rightsquigarrow x$,
- *Si $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow z$ alors $x \rightsquigarrow z$.*

Sur le graph, cela signifie qu'il existe un chemin de x à y.

Definition 6 (Etats communiquants)

Soient $x, y \in E$. Si $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$ alors x et y communiquent. On note $x \leftrightarrow y$.

Definition 7 (Classes d'équivalence)

Une classe d'équivalence est un sous-ensemble $\mathscr{C}_x \subset E$ formé d'états communiquant avec $x \in E$. Formellement

$$\mathscr{C}_x = \{y \in E \ ; \ x \leftrightarrow y\}$$

Remarque 1

1. On parle de classe d'équivalence car la relation de communication est symétrique, réflexive, et transitive.
2. l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de l'espace d'état. Ce sont les classes irréductibles de la chaine de Markov.

Definition 8 (Irréductibilité)

La chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible si pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$Q^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0.$$

Remarque 2

Dans une chaine irréductible tout les états communiquent. L'espace d'état est une classe d'équivalence.

Definition 9 (Classe d'équivalence ouverte/fermée)

Une classe (d'équivalence) $\mathscr{C}$ est

- ouverte si pour tout $x \in \mathscr{C}$ il existe $y \in E/\mathscr{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $Q^n(x,y) > 0$,
- fermée sinon.

Exemple 12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène d'espace d'état $\{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Combien de classe d'équivalence?
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une chaine irréductible?
3. Distinguer les classes ouvertes et fermées.

Remarque 3

On peut définir une sous-chaine de Markov irréductible à partir d'une classe fermée.

Definition 10 (La périodicité d'un état)

La période d'un état $x \in E$ est défini par

$$\begin{aligned} d(x) &= \text{pgcd}\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ Q^n(x,x)\} \\ &= \text{pgcd}\{\text{Longueur des trajectoires menant de } x \text{ à } x\} \end{aligned}$$

Si $d(x) = 1$ alors x est un état apériodique.

Remarque 4

1. Si $Q(x,x) > 0$ alors x est apériodique.
2. Si $x \leftrightarrow y$ alors $d(x) = d(y)$
3. Soit $\mathscr{C}$ une classe d'équivalence, alors la période d'un état $x \in \mathscr{C}$ est la période de la classe d'équivalence $\mathscr{C}$.

Exemple 13

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène $\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Chaine irréductible? Combien de classes d'équivalence? Ouvertes ou fermées?
2. Donner la période de chaque état?

2. Etats récurrents, états transitoires

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène d'espace d'état E. On notera la probabilité et l'espérance conditionnelle de X_n sachant $X_0 = x$ de la façon suivante

$$\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y),\ y \in E,\ \text{et}\ \mathbb{E}(X_n|X_0 = x) = \mathbb{E}_x(X_n).$$

Definition 11 (T_x, S_x, et N_x)

Soit $x \in E$, on note

1. $S_x = \inf\{n \geq 1\ ;\ X_n = x\}$ est le temps de retour à l'état x (en supposant que $X_0 = x$),
2. $N_x = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}$ le nombre de passage par l'état x (sans compter le point de départ).

Definition 12 (Etat récurrent/transitoire)

1. Un état $x \in E$ est récurrent si
$$\mathbb{P}_x(S_x < \infty) = 1$$
2. Un état $x \in E$ est transitoire
$$\mathbb{P}_x(S_x = \infty) > 0$$

Un état est transitoire lorsqu'il n'est pas récurrent.

Si $x \in E$ est un état récurrent, alors on est sur que la chaine repassera par x. Si x est transitoire alors il existe un évènement, de probabilité non nulle, pour lequel la chaine ne repasse pas par x.

Theoreme 2 (Caractérisation de la récurrence)

1. *$x \in E$ est récurrent* $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,x) = \infty$
2. *$x \in E$ est transitoire* $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,x) < \infty$. *De plus, on a*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = \mathbb{P}_x(S_x = \infty)\left[1 - \mathbb{P}_x(S_x = \infty)\right]^k, k = 0,1,2\dots, \textit{ (Distribution géométrique)}.$$

preuve:
On commence par remarquer que pour $x, y \in E$,

$$\mathbb{E}_y(N_x) = \mathbb{E}_y\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{X_n = x\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_y(\mathbb{I}_{\{X_n = x\}}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_y(X_n = x) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(y,x).$$

Posons $F_n = \{X_n = x,\ X_m \neq x\ ;\ m \geq n+1\}$ et $G = \{X_n \neq x\ ;\ n \geq 1\}$, on a

$$\{N_x < \infty\} = G \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

Comme les évènements ci-dessus sont disjoints alors

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(G) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(F_n). \tag{1}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(F_n) &= \mathbb{P}_x(X_n = x,\ X_m \neq x\ ;\ m \geq n+1) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x,\ X_m \neq x\ ;\ m \geq n+1 | X_0 = x) \\
&= \mathbb{P}(X_m \neq x\ ;\ m \geq n+1 | X_n = x, X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x) \\
&= \mathbb{P}(X_m \neq x\ ;\ m \geq n+1 | X_n = x)\mathbb{P}_x(X_n = x) \text{ (propriété de Markov)} \\
&= \mathbb{P}_x(X_n \neq x\ ;\ n \geq 1)\mathbb{P}_x(X_n = x) \text{ (Homogénéité)} \\
&= \mathbb{P}_x(G) Q^n(x,x)
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (1), il vient

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(G)\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,x)\right] = \mathbb{P}_x(G)[1 + \mathbb{E}_x(N_x)]$$

- Si x est récurrent alors $\mathbb{P}_x(G) = 0$, par suite $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 0$, $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$. Cela implique $\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,x) = \infty$.
- Si x est transitoire alors $\mathbb{P}_x(G) > 0$ et

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{\mathbb{P}_x(N_x < \infty)}{\mathbb{P}_x(G)} - 1 < \infty$$

  ce qui implique que $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,x) < \infty$ et $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$

Supposons que x soit transitoire. Pour montrer que N_x suit une loi géométrique, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 1

$\mathbb{P}_x(N_x = 0) = \mathbb{P}(S_x = \infty)$ *et* $\mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty) = \mathbb{P}_x(N_x = k-1)$, *pour* $k \geq 1$.

preuve:

L'égalité $\mathbb{P}_x(N_x = 0) = \mathbb{P}(S_x = \infty)$ est évidente au vu de la définition de S_x. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty) &= \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty, X_0 = x) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{X_i = x} = k \Big| S_x < \infty, X_{S_x} = x, X_0 = x \right) \\
&= \mathbb{P}\left(1 + \sum_{i=S_x+1}^{+\infty} \mathbb{I}_{X_i = x} = k \Big| S_x < \infty, X_{S_x} = x \right) \\
&= \mathbb{P}\left(1 + \sum_{i=S_x+1}^{+\infty} \mathbb{I}_{X_i = x} = k \Big| S_x < \infty, X_{S_x} = x \right) \\
&= \mathbb{P}_x(N_x = k - 1)
\end{aligned}
$$

□

Par application du lemme, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N_x = k) &= \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty)\mathbb{P}_x(S_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(N_x = k-1)\mathbb{P}_x(S_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(N_x = k-1 | S_x < \infty)\mathbb{P}_x(S_x < \infty)^2 \\
&= \mathbb{P}_x(N_x = k-2)\mathbb{P}_x(S_x < \infty)^2 \\
&= \dots \\
&= \mathbb{P}_x(N_x = 0)\mathbb{P}_x(S_x < \infty)^k. \\
&= \mathbb{P}_x(S_x = \infty)\mathbb{P}_x(S_x < \infty)^k.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1

Si la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible alors soit

- *Tous les états sont récurrents et*

$$\mathbb{P}_x(N_y = \infty,\ \forall y \in E) = 1$$

- *Tous les états sont transitoires et*

$$\mathbb{P}_x(N_y < \infty,\ \forall y \in E) = 1$$

Si l'espace d'état E est fini alors tous les états sont récurrents.

preuve:
Comme $x \leftrightarrow y$ alors il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$Q^{n_1}(x,y) > 0 \text{ et } Q^{n_2}(y,x) > 0$$

Comme

$$Q^{n_1+n+n_2}(x,x) \geq Q^{n_1}(x,y)Q^n(y,y)Q^{n_2}(y,x) \text{ et } Q^{n_2+n+n_1}(y,y) \geq Q^{n_2}(y,x)Q^n(x,x)Q^{n_1}(x,y),$$

alors $\sum_{n\geq 1} Q^n(x,x)$ et $\sum_{n\geq 1} Q^n(y,y)$ sont de même nature et partant

- Si x est récurrent alors y aussi
- Si x est transitoire alors y aussi

Supposons x récurrent alors

$$\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = \mathbb{P}_x(N_y = \infty | S_y < \infty)\mathbb{P}_x(S_y < \infty)$$

or $\mathbb{P}_x(S_y < \infty) = 1$, en effet on peut remarquer que

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}_y(N_y < \infty) &> \mathbb{P}_y(S_y = \infty, S_x < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(S_y = \infty)\mathbb{P}_y(S_x < \infty). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_y(S_x < \infty) = \sum_{k \geq 1} Q^k(y,x) > 0$ alors $\mathbb{P}_x(S_y = \infty) = 0$ puis $\mathbb{P}_x(S_y < \infty) = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(N_y = \infty) &= \mathbb{P}_x(N_y = \infty | S_y < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(1 + \sum_{k=S_y+1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_k = y\}} = \infty | S_y < \infty, X_{S_y} = y) \\ &= \mathbb{P}_y\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_k = y\}} = \infty\right) = \mathbb{P}_y\left(N_y = \infty\right) = 1. \end{aligned}$$

Suppossons que x soit transitoire alors il existe $n, r \in \mathbb{N}$ tels que

$$Q^n(x,y) > 0 \text{ et } Q^r(y,x) > 0$$

puis

$$Q^{n+r}(x,x) \geq Q^n(x,y)Q^r(y,x)$$

comme $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^{n+r}(x,x) < \infty$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,y) < \infty$ et $\mathbb{E}_x(N_y) < \infty$, ce qui implique $\mathbb{P}_x(N_y < \infty) = 1$.
Enfin supposons que l'espace d'état E soit fini. Supposons que x soit transitoire alors $\sum_{y\in E}\sum_{n=1}^{\infty} Q^n(x,y) < \infty$, cela est absurde car

$$\sum_{y\in E}\sum_{n=1}^{\infty} Q^n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in E} Q^n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

□

III. Mesure invariante et récurrence positive

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène sur une espace d'état E et de matrice de transition Q.

Definition 13 (Mesure invariante)

Soit μ une mesure positive et non identiquement nulle sur E. μ est une mesure invariante si elle vérifie

$$\mu(y) = \sum_{x\in E} \mu(x)Q(x,y),$$

soit matriciellement

$$\mu = \mu \mathrm{Q}.$$

Remarque 5

Si on suppose que $\mu(E) < \infty$, toujours vrai si E est fini, alors quitte à remplacer $\mu(.)$ par $\mu(.)/\mu(E)$, on obtient une mesure de probabilité invariante. On remarque aussitôt que

$$\mu = \mu \mathrm{Q}^n, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

cela implique que si on choisit μ comme loi initiale alors $X_0, X_1, X_2, \ldots,$ sont identiquement distribués (pas indépendants).

Definition 14 (Mesure réversible)

Soit λ une mesure finie, non identiquement nulle, sur E. λ est une mesure reversible si

$$\lambda(x)Q(x,y) = \lambda(y)Q(y,x), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Proposition 6

$$\lambda \textit{ reversible } \Rightarrow \lambda \textit{ invariante.}$$

preuve:
On a

$$\sum_{x \in E} \lambda(x)Q(x,y) = \sum_{x \in E} \lambda(y)Q(y,x) = \lambda(y)$$

□

Exemple 14 (Modèle d'urne d'Erhenfest)

Dans deux urnes A et B se trouvent N boules numérotées de 1 à N. Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond au nombre de boules présente dans l'urne A. On suppose qu'initialement toutes les boules sont dans l'urne A (soit $X_0 = N$). A chaque pas de temps

1. On tire un numéro i au hasard dans $\{1,\dots,n\}$
2. La boule portant le numéro i change d'urne

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une CMH d'espace d'état $E = \{0,\dots,N\}$ de probabilité de transition

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{N-x}{N}, & \text{si } y = x+1, \text{ et } x = 0,\dots,N-1, \\ \frac{x}{N}, & \text{si } y = x-1, \text{ et } x = 1,\dots,N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une mesure λ est réversible si et seulement si elle vérifie

$$\lambda(x)\frac{N-x}{N} = \lambda(x+1)\frac{x+1}{N},\ x = 0,\dots,N-1.$$

On remarque alors que $\lambda(x) = \binom{N}{x}$ convient.

Theoreme 3

Soit x un état récurrent. La formule

$$\nu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S_x-1} \mathbb{I}_{X_k=y}\right),$$

définit une mesure invariante. De plus, $\nu_x(y) > 0$ si et seulement si y appartient à la même classe de communication que x.

preuve

Pour commencer, si y ne communique pas avec x alors $\nu_x(y) = 0$. On écrit

$$\nu_x(y) \quad = \quad \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{I}_{X_k=y}\right)$$

en effet, si $x = y$ alors

$$\nu_x(x) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S_x-1} \mathbb{I}_{X_k=x}\right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{I}_{X_k=x}\right) = 1$$

et si $x \neq y$, on sait que $X_0 = X_{S_x} = x$ et donc

$$\mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{S_x - 1} \mathbb{1}_{X_k = y} \right) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{1}_{X_k = y} \right)$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\nu_x(y) &= \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{1}_{X_k=y}\right) \\
&= \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{1}_{X_{k-1}=z, X_k=y}\right) \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{X_k=y, X_{k-1}=z, S_x\geq k}\right) \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{X_k=y, X_{k-1}=z, S_x\geq k}\middle|\mathscr{F}_{k-1}\right)\right] \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{k-1}=z, S_x\geq k}\mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{X_k=y}\middle|\mathscr{F}_{k-1}\right)\right] \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{k-1}=z, S_x\geq k}\, Q(X_{k-1}, y)\right] \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{k-1}=z, S_x\geq k}\, Q(z, y)\right] \\
&= \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{S_x} \mathbb{1}_{X_{k-1}=z}\right] Q(z,y) \\
&= \sum_{z\in E} \nu_x(z) Q(z,y).
\end{aligned}
$$

Remarque 6

1. S'il existe plusieurs classes de récurrence (classe de communication contenant un état récurrent) R_i, $i \in I$. En choisissant pour chaque i, un état $x_i \in R_i$, alors

$$\nu_{x_i}(y) = \mathbb{E}_{x_i}\left[\sum_{k=0}^{S_{x_i}-1} \mathbb{1}_{X_k=y}\right], \; y \in R_i.$$

définit des mesures invariantes à support disjoints $R_i \subset E$.

2. Si E est fini il existe au moins un état récurrent, on peut donc définir une mesure invariante. Celle-ci sera finie, on pourra donc obtenir une probabilité invariante en normalisant. On retiendra que si l'espace d'état est fini, alors il existe au moins une probabilité invariante!

Theoreme 4 (Mesure invariante proportionnelle)

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible et récurrente alors la mesure invariante est unique à une constante multiplicative près.

preuve:
Soit μ une mesure invariante. On montre par récurrence sur p, que pour $p \geq 0$ entier et $x, y \in E$

$$\mu(y) \geq \mu(x)\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{p\wedge(S_x-1)} \mathbb{1}_{X_k=y}\right]$$

Si $x = y$ alors l'inégalité est immédiate puisque

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{p\wedge(S_x-1)} \mathbb{1}_{X_k=x}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S_x-1} \mathbb{1}_{X_k=x}\right] = \nu_x(x) = 1.$$

Soit $x \neq y$. Supposons que $p=0$, l'inégalité est triviale. Supposons l'inégalité vérifiée au rang p qu'en est il au rang $n+1$?

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \sum_{z\in E}\mu(z)Q(z,y)\\
&\geq \sum_{z\in E}\mu(x)\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{p\wedge(S_x-1)}\mathbb{1}_{X_k=z}\right]Q(z,y)\\
&= \mu(x)\sum_{z\in E}\sum_{k=0}^{p}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_k=z,k\leq S_x-1}\right]Q(z,y)\\
&= \mu(x)\sum_{z\in E}\sum_{k=0}^{p}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_k=z,X_{k+1}=y,k\leq S_x-1}\right]\\
&= \mu(x)\sum_{k=0}^{p\wedge(S_x-1)}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{k+1}=y}\right]\\
&= \mu(x)\sum_{k=1}^{(p+1)\wedge S_x}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_k=y}\right]
\end{aligned}$$

La propriété est vérifiée au rang $p+1$ et donc pour tout p. Lorsque p tend vers l'infini on trouve

$$\mu(y)\geq\mu(x)\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S_x-1}\mathbb{1}_{X_k=y}\right]=\mu(x)\nu_x(y).$$

Fixons $x \in E$. La mesure ν_x est invariante et on a $\mu(y) \geq \mu(x)\nu_x(y)$ pour tout $y \in E$. De plus pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) Q^n(y,x) \geq \sum_{y \in E} \mu(x)\nu_x(y) Q^n(y,x) = \mu(x)\nu_x(x) = \mu(x)$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{y \in E} (\mu(y) - \mu(x)\nu_x(y)) Q^n(y,x) = 0$$

donc on a l'égalité $\mu(y) = \mu(x)\nu_x(y)$ pour y tel qu'il existe $n \geq 1$ avec $Q^n(y,x) > 0$. Cela est vrai pour tout $y \in E$ puisque la chaine est irréductible. On a bien

$$\mu = \mu(x)\nu_x$$

□

Corollaire 2

Si $(X_n)_n \geq 0$ est une CMH irréductible et récurrente alors

1. *Soit il existe une unique mesure de probabilité invariante π et on a pour tout $x \in E$*

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x(S_x)},$$

   la chaine est dite récurrente positive.

2. *Soit il n'existe pas de mesure de probabilité (les mesures invariantes ont une masse totale infinie) et pour tout $x \in E$*

$$\mathbb{E}_x(S_x) = \infty,$$

   la chaine est dite récurrente nulle.

preuve:
D'après le théorème 4, les mesures invariantes sont proportionnelles. Elles ont donc toutes une masse infinie ou toute une masse finie. Supposons que leur masse totale soit finie et notons π l'unique mesure de probabilité. On a $\pi = C\nu_x$ puis $C = (\nu_x(E))^{-1}$ et

$$\pi(x) = \frac{\nu_x(x)}{\nu_x(E)} = \frac{1}{\mathbb{E}_x(S_x)}$$

Supposons que la masse totale des mesures invariantes soit infinie alors

$$\mathbb{E}_x(S_x) = \nu_x(E) = \infty.$$

Proposition 7 (Loi invariante et espace d'état fini)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène dont l'espace d'état est fini.

- *Il existe au moins une mesure de probabilité invariante*

Si la chaine $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible alors cette loi est unique.

preuve:
Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov sur un espace d'état fini alors il existe au moins un état récurrent et donc au moins une mesure invariante. Cette mesure est nécessairement de masse finie et peut donc être normalisée pour devenir une mesure de probabilité.
De plus, si la chaine est irréductible alors tous les états sont récurrents puis récurrents positifs car l'espace d'état est fini. D'où l'unicité de la loi de probabilité invariante par le corollaire 2.

Exemple 15 ($\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$)

Soit $\{X_t \ ; \ t \in \mathbb{N}\}$ une chaine de Markov homogène sur un espace d'état $E = \{1,2,3\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

1. Justifiez l'existence et l'unicité d'une loi invariante
2. Pour chaque $x \in E$, donnez π_x en résolvant $\begin{cases} \pi.Q = \pi, \\ \sum_{x\in E} \pi_x = 1. \end{cases}$
3. pour chaque $x \in S$, donnez $\mathbb{E}_x(S_x)$.

IV. Stabilisation des chaines de Markov

1. Convergence vers la loi stationaire

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique de la chaine de Markov. La question est de savoir si la chaine de Markov se stabilise au sens où elle atteint un état "stationnaire". Nous allons notamment étudier le lien entre stationarité et mesure de probabilité invariante.

Theoreme 5 (Temps moyen passé en x)

Soit une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ homogène et irréductibe sur un espace d'état E.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{X_k=x}=\frac{1}{\mathbb{E}_x(S_x)}\ p.s.$$

preuve

Posons $m(n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{X_k=x}$. Si la chaine est transiente alors $\mathbb{P}(S_x=\infty)>0,\ \forall x\in E$ et donc $\mathbb{E}_x(S_x)=\infty$. De plus on remarque que $\forall\omega\in\Omega\ m(n)[\omega]$ (on comprend Ω comme l'ensemble des trajectoires possibles du processus) devient constant pour n suffisamment grand (comme x est transient alors au bout d'un moment la chaine ne visite plus x), cela implique que $m(n)/n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ p.s.

Supposons la chaine récurrente, on introduit la suite de variables aléatoires.

$$S_k=\inf\{n>S_{k-1}\ ;\ X_n=x\},\ k\geq 1$$

qui représente les temps de k^{eme} retour en x. On convient que $S_0 = 0$ et $S_1 = S_x$. Soit $\Delta_k^S = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 1$ les temps séparant deux passages par x consécutifs.

Lemme 2

$(\Delta_n^S)_{n\geq 1}$ est une i.i.d. de variables aléatoires distribuées comme $S_x|X_0 = x$

preuve:
On va se contenter de montrer le résultat pour les deux premiers délais. On a pour $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(S_1 = p, \Delta_2^S = q) &= \mathbb{P}(\Delta_2^S = q | S_1 = p, X_0 = x)\mathbb{P}_x(S_1 = p) \\
&= \mathbb{P}(X_{p+q} = x, \bigcap_{k=p+1}^{p+q-1} \{X_k \neq x\} | X_p = x, \bigcap_{k=1}^{p-1} \{X_k \neq x\}, X_0 = x)\mathbb{P}_x(S_1 = p) \\
&= \mathbb{P}(X_{p+q} = x, \bigcap_{k=p+1}^{p+q-1} \{X_k \neq x\} | X_p = x)\mathbb{P}_x(S_1 = p) \\
&= \mathbb{P}(X_q = x, \bigcap_{k=1}^{q-1} \{X_k \neq x\} | X_0 = x)\mathbb{P}_x(S_1 = p) \\
&= \mathbb{P}_x(S_1 = q)\mathbb{P}_x(S_1 = p) = \mathbb{P}_x(S_x = q)\mathbb{P}_x(S_x = p)
\end{aligned}$$

□

En vertu de le loi forte des grands nombres, il vient

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^S}{n} \to \mathbb{E}_x(S_x) \text{ p.s.}$$

Comme x est récurrent alors $m(n) \to \infty$ et

$$\frac{S_m(n)}{m(n)} \to \mathbb{E}_x(S_x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $m(n)[\omega] = l$, on a $S_l[\omega] \leq n \leq S_{l+1}[\omega]$ (On retourne l fois en x avant n puis la $l+1^{eme}$ visite a lieu après n). Par suite,

$$\frac{S_{m(n)}}{m(n)} \leq \frac{n}{m(n)} \leq \frac{S_{m(n)+1}}{m(n)} = \frac{S_{m(n)+1}}{m(n)+1} \frac{m(n)+1}{m(n)}$$

Théorème des gendarmes $\Rightarrow$ $\frac{n}{m(n)} \to \mathbb{E}_x(S_x)$.

Vérifions que si $\mathbb{E}_x(S_x) = \infty$ alors $\mathbb{E}_y(S_y) = \infty$, $\forall y \in E$.

Notons que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_y \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k = y} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Q^k(y,y)$$

d'une part et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_y\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{X_k=y}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_y(S_y)}$$

en vertu du résultat de convergence précédent. L'irréductibilité de la chaine entraine l'existence de $r,s \geq 1$ tels que $Q^r(x,y) > 0$ et $Q^s(y,x) > 0$. On remarque que $Q^{r+k+s}(x,x) \geq Q^r(x,y)Q^k(y,y)Q^s(y,x)$ puis

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q^k(y,y) \leq \frac{1}{nQ^r(x,y)Q^s(y,x)}\sum_{k=1}^{n} Q^{r+k+s}(x,x) \to 0.$$

On en déduit que $\mathbb{E}_y(S_y) = \infty$. On peut montrer de manière équivalente que $E_x(S_x) < \infty \Rightarrow E_y(S_y) < \infty,\ y \in E$

$\square$

Remarque 7

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q^k(x,x) \to \begin{cases} 0, & \text{récurrence nulle,} \\ 1/\mathbb{E}_x(S_x), & \text{récurrence positive.} \end{cases}$$

D'après le Théorème 5 et la convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{X_k=x}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_\mu(X_k = x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu Q^k(x) \to \frac{1}{\mathbb{E}_x(S_x)} := \pi(x)$$

pour toute loi initiale μ et en particulier $\forall x, y \in E$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q^k(y,x) \to \pi(x).$$

Nous venons de montrer que pour une chaine irréductible, récurrente positive, la suite $(\pi Q^n(x))$ converge en moyenne de Césarro vers $\pi(x)$ avec

$$\frac{\mu Q(x) + \mu Q^2(x) + \ldots + \mu Q^n(x)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \pi(x).$$

Mais que dire de la convergence de $\mu Q^n(x) = \mathbb{P}_\mu(X_n = x)$ au sens usuel? La chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi vers une variable aléatoire X_∞? Cette convergence est établie sous réserve d'apériodicité.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irréductible, récurrente positive.

Proposition 8

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est apériodique alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a

$$Q^n(x,y)>0 \text{ pour tout } x,y\in E.$$

preuve:
Soit $I(x)=\{n\in\mathbb{N}^* \ ; \ Q^n(x,x)>0\}$. On note que si $p,q\in I(x)$ alors $p+q\in I(x)$.

Lemme 3

Soit un ensemble $A\subset\mathbb{N}^*$, stable par addition de pgcd égal à 1 alors A contient tout les entiers plus grand que N.

preuve:
Soit $A'=A\cup\{0\}$, alors $A'-A'$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ qui est donc de la forme $d\mathbb{Z}$, avec d le plus petit élément non nul de A'. Comme A' contient A alors d divise tout les élements de A donc $d=1$. On en déduit qu'il existe $a,b\in A'$ tels que $a+1=b$. Nécécessairement, $a\in A$,

- si $b=0$ alors $a=1$ et A contient tout les entiers naturels

- Si $b \in A$ alors $N = b^2$ convient car pour $n \geq N$, on a pour $0 \leq r < b$,

$$n = b^2 + bq + r = b(q+1-r) + (b+1)r \in A$$

□

$I(x) \subset \mathbb{N}$ est stable par addition, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $I(x)$ contient tout les entiers supérieurs à n_1 et $Q^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq n_1$. Par irréductibilité, on a aussi pour tout $z, y \in E$ l'existence de $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tels que $Q^{n_2}(z,x) > 0$ et $Q^{n_3}(x,y) > 0$. On en déduit que

$$Q^{n_2+n+n_3}(z,y) \geq Q^{n_2}(z,x)Q^n(x,x)Q^{n_3}(x,y) > 0$$

On choisit alors $N = n_1 + n_2 + n_3$.

Definition 15 (Chaine de Markov couplée)

Soit $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une copie indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle $((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la chaine couplée.

- (X_n,X'_n) est une chaine de Markov sur $E\times E$ de matrice de transition $\overline{Q}[(x,x'),(y,y')] = Q(x,y)Q(x',y')$
- Soit μ et ν les lois initiales respectives de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors la loi initiale de $((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la mesure produit $\mu\otimes\nu$

Proposition 9

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique alors la chaine couplée $((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et récurrente positive.

preuve:
On vérifie que, il existe $N\in\mathbb{N}$ telle que $\forall n\geq N$

$$\overline{Q}^n[(x,x'),(y,y')] = Q^n(x,y)Q^n(x',y')>0$$

d'après la Proposition 8. $((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc irréductible. On note ensuite que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}^n[(x,x'),(y,y')] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Q^n(x,y)Q^n(x',y') \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Q^n(x,y)<\infty$$

et donc que $((X_n, X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive.

Theoreme 6

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est apériodique alors la chaine se stabilise au sens où, pour toutes lois initiales μ, ν sur E, on a

$$\sup_{y\in E} |\mu Q^n(y) - \nu Q^n(y)| \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightarrow} 0.$$

et en particulier

$$\mu Q^n(y) \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightarrow} \pi(y).$$

<u>preuve:</u>

Soit $((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la chaine couplée de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi initiale $\mu\otimes\nu$ et $\tau_x=\inf\{n\in\mathbb{N}^*\ ;\ (X_n,X'_n)=(x,x)\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mu Q^n(y) &= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y)\\
&= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,\tau_x>n)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,\tau_x=k)\\
&= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,\tau_x>n)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,X_k=x,\tau_x=k)\\
&= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,\tau_x>n)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y|X_k=x)\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(\tau_x=k)\\
&= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y,\tau_x>n)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{x}(X_{n-k}=y)\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(\tau_x=k)
\end{aligned}$$

d'une part et

$$\nu Q^n(y)=\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X'_n=y,\tau_x>n)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{x}(X'_n=y)\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(\tau_x=k)$$

d'autre part. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\mu Q^n(y)-\nu Q^n(y)| &= |\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X_n=y|\tau_x>n)-\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(X'_n=y|\tau_x>n)|\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(\tau_x>n) \quad (2)\\
&\leq 2\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}(\tau_x>n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 (\text{car } ((X_n,X'_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est récurrente} \quad (3)
\end{aligned}$$

On constate que

$$\mu Q^n(y) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \pi(y).$$

en choisissant $\nu = \pi$.

Que peut-on dire d'une chaine de Markov qui n'est pas irréductible?
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène sur un espace d'état fini. Ce dernier se divise en $k=k_1+k_2$ classes d'équivalence avec $O_1,\ldots,O_{k_1}$ les classes ouvertes et $F_1,\ldots,F_{k_2}$ les classes fermées.

- $x\in\bigcup_{i=1}^{k_1} O_i$ alors x est transient et $\pi(x)=0$
- Pour chaque classe fermée F_i, $i=1,\ldots,k_2$,
  - On définit une sous matrice de transition Q_{F_i}, de loi stationaire unique π_{F_i}
  - On définit le vecteur $\Pi_{F_i}=\begin{pmatrix}0 & \pi_{F_i} & 0\end{pmatrix}$ de dimension $\mathrm{Card}(E)$.

Les lois stationnaires de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la forme suivante

$$\pi=\sum_{i=1}^{k_2}\alpha_i\Pi_{F_i},\ \text{avec}\ \begin{cases}0\le\alpha_i\le 1\\ \sum_{i=1}^{k_2}\alpha_i=1\end{cases}$$

S'il n'y a qu'une seule classe fermée ($k_2=1$) alors la loi stationnaire est unique et $\alpha_1=1$.

Exemple 16

Soit $\{X_t \ ; \ t \in \mathbb{N}\}$ une chaine de Markov sur un espace d'état $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1. $\{X_t \ ; \ t \in \mathbb{N}\}$ est-elle irreductible, combien de classe de communication, ouvertes/fermées?
2. Donnez la forme générale des lois invariantes.

2. Théorèmes ergodiques

Theoreme 7 (Théorème ergodique)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène, irréductible et récurrente positive sur un espace d'état E. Soient μ une mesure invariante, et $f,g : E \mapsto \mathbb{R}_+$ telles que $\int f d\mu < \infty$ et $\int g d\mu < \infty$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}, \ \mathbb{P}_x - p.s.$$

Avec g constante égale à 1, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\pi, \ \mathbb{P}_x - p.s.$$

avec π l'unique mesure de probabilité invariante.

preuve:
On définit les temps d'arrêts

$$S_0 = 0, \text{ et } S_n = \inf\{k \geq S_{n-1}, \ X_k = x\}$$

S_k est le temps de $k^{\text{ème}}$ retour en x, comme l'état x est récurrent alors ces temps d'arrêt sont finis presque sûrement. On pose

$$Z_n(f) = \sum_{k=S_n}^{S_{n+1}-1} f(X_k), \; n \geq 1.$$

Lemme 4

Les v.a. $Z_n(f)$, $n = 0, 1, \ldots$, sont i.i.d.

Soient $g_1, g_2, g_3, \ldots$ des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{R}_+$. On va montrer l'identité

$$\mathbb{E}_x \left\{ \prod_{i=0}^{n} g_i[Z_i(f)] \right\} = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}_x \left\{ g_i[Z_0(f)] \right\}.$$

par récurrence sur n. Au rang $n = 0$ l'identité est vérifiée. Supposons la propriété vérifiée au rang $n \in \mathbb{N}$, qu'en est-il au rang $n+1$?

On note que $Z_0(f),\dots,Z_n(f)$ sont mesurable par rapport à la filtration $\mathscr{F}_{S_n}$. De plus, $Z_{n+1}(f)$ est indépendante de $\mathscr{F}_{S_n}$ et distribuée comme $[Z_0(f)|X_0 = x]$ d'après la propriété de Markov forte. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left\{\prod_{i=0}^{n+1} g_i[Z_i(f)]\right\} &= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_x\left\{\prod_{i=0}^{n+1} g_i[Z_i(f)]\right\}\middle|\mathscr{F}_{S_n}\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\prod_{i=0}^{n} g_i[Z_i(f)]\mathbb{E}_x\left\{g_{n+1}[Z_{n+1}(f)]\middle|\mathscr{F}_{S_n}\right\}\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left\{\prod_{i=0}^{n} g_i[Z_0(f)]\right\}\mathbb{E}_x\left\{g_{n+1}[Z_0(f)]\right\}
\end{aligned}$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$. On rappelle que

$$\nu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S_x-1} \mathbb{1}_{X_k=y}\right), \text{ pour } y \in E.$$

définie une mesure invariante, on considère une mesure invariante définie par $\mu = \mu(x)\nu_x$ ($\nu_x(x) = 1$ et les mesures invariantes sont proportionnelles). On observe alors

$$\mathbb{E}_x[Z_0(f)] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S_x-1}\sum_{y\in E} f(y)\mathbb{1}_{X_k=y}\right] = \sum_{y\in E} f(y)\nu_x(y) = \frac{\int f\mathrm{d}\mu}{\mu(x)}$$

La loi forte des grands nombres implique

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_k(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\int f \mathrm{d}\mu}{\mu(x)}$$

On note $N_x(n)$ le nombre de passage par l'état x avant l'instant n, de sorte que

$$S_{N_x(n)} \leq n \leq S_{N_x(n)+1},$$

et

$$\frac{\sum_{k=0}^{S_{N_x(n)}-1} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{S_{N_x(n)+1}-1} f(X_k)}{N_x(n)}.$$

Cela est équivalent à

$$\frac{\sum_{k=0}^{N_x(n)-1} Z_k}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{N_x(n)+1} Z_k}{N_x(n)}$$

puis

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{N_x(n)} \to \frac{\int f \mathrm{d}\mu}{\mu(x)}$$

On effectue le même travail pour g avant de conclure.

Remarque 8 (Algorithme MCMC)

Les méthodes de simulation de Monte Carlo par chaine de Markov consiste à estimer l'intégrale $\int f(X)\mathrm{d}\pi$ par $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$, où $X_1,\ldots,X_n$ sont les points d'une trajectoire d'une chaine de Markov dont la loi de probabilité invariante π. Activité Python

Mes notes se basent sur les documents [4, 2, 1, 3].

Maryann Hohn.
PSTAT160A: Applied Stochastic Processes - Lecture notes.
2017.

Nabil Kazi-Tani.
Modèles aléatoires discrets - Cours scannés ISFA.
2017.

Jean-François Le Gall.
Intégration, probabilités et processus aléatoires.
Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.

Lionel Truquet.
Statistique des processus 3A - Note de cours.
http://www.ensai.fr/files/_media/documents/Enseignants%20chercheurs%20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf.