TD 1: CHAINE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2019-2020
P.-O. Goffard & Rémy Poudevigne

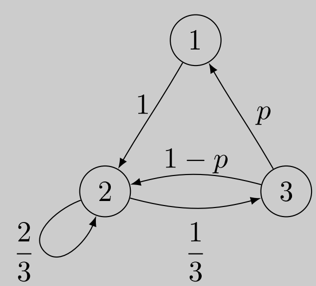
---

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition ($p \in [0,1]$):

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

Solution: La chaîne de Markov est donnée par le graphe suivant :



(b) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$.

Solution: Pour calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, on peut calculer les lois de X_1, X_2, X_3 et X_4, par récurrence en partant de $X_0 = 1$ presque sûrement. Pour cela on définit la suite de loi $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\mu_0(\{1\}) = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} := \mu_n Q.$$

On trouve alors:

$$\mu_1(\{1\}) = \mu_0(\{1\}) \times 0 + \mu_0(\{2\}) \times 0 + \mu_0(\{3\}) \times p = 0,$$
$$\mu_1(\{2\}) = \mu_0(\{1\}) \times 1 + \mu_0(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_0(\{3\}) \times (1-p) = 1,$$
$$\mu_1(\{3\}) = \mu_0(\{1\}) \times 1 + \mu_0(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_0(\{3\}) \times 0 = 1/0.$$

De la même façon, on trouve,

$$\mu_2(\{1\}) = \mu_1(\{1\}) \times 0 + \mu_1(\{2\}) \times 0 + \mu_1(\{3\}) \times p = 0,$$
$$\mu_2(\{2\}) = \mu_1(\{1\}) \times 1 + \mu_1(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_1(\{3\}) \times (1-p) = 2/3,$$
$$\mu_2(\{3\}) = \mu_1(\{1\}) \times 1 + \mu_1(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_1(\{3\}) \times 0 = 1/3.$$

Puis

$$\mu_3(\{1\}) = \mu_2(\{1\}) \times 0 + \mu_2(\{2\}) \times 0 + \mu_2(\{3\}) \times p = \frac{3p}{9},$$
$$\mu_3(\{2\}) = \mu_2(\{1\}) \times 1 + \mu_2(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_2(\{3\}) \times (1-p) = \frac{7-3p}{9},$$
$$\mu_3(\{3\}) = \mu_2(\{1\}) \times 1 + \mu_2(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_2(\{3\}) \times 0 = \frac{2}{9}.$$

Et enfin,

$$\mu_4(\{1\}) = \mu_3(\{1\}) \times 0 + \mu_3(\{2\}) \times 0 + \mu_3(\{3\}) \times p = \frac{6p}{27},$$
$$\mu_4(\{2\}) = \mu_3(\{1\}) \times 1 + \mu_3(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_3(\{3\}) \times (1-p) = \frac{20-3p}{9},$$
$$\mu_4(\{3\}) = \mu_3(\{1\}) \times 1 + \mu_3(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_3(\{3\}) \times 0 = \frac{7-3p}{27}.$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1) =& \mu_1(\{1\}) = 0 \\
\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1) =& \mu_2(\{1\}) = 0 \\
\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1) =& \mu_3(\{1\}) = 3p/9 \\
\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) =& \mu_4(\{1\}) = 6p/27.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$, on va calculer sommer les probabilités des chemins amenant de 2 à 2.
Il n'y a qu'un seul chemin allant de 2 à 2 en une étape : $2 \to 2$. Ce chemin a une probabilité $2/3$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2) = 2/3$.
Il y a deux chemins allant de 2 à 2 en deux étapes : $2 \to 2 \to 2$ et $2 \to 3 \to 2$. Le chemin $2 \to 2 \to 2$ a une probabilité $2/3 \times 2/3 = 4/9$ et le chemin $2 \to 3 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times (1-p) = \frac{3-3p}{9}$. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2) = \frac{4}{9} + \frac{3-3p}{9} = \frac{7-3p}{9}$.
Il y a quatre chemins allant de 2 à 2 en trois étapes : $2 \to 2 \to 2 \to 2$, $2 \to 3 \to 2 \to 2$, $2 \to 2 \to 3 \to 2$ et $2 \to 3 \to 1 \to 2$. Le chemin $2 \to 2 \to 2 \to 2$ a une probabilité $2/3 \times 2/3 \times 2/3 = 8/27$, le chemin $2 \to 3 \to 2 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times (1-p) \times \frac{2}{3} = \frac{6-6p}{27}$, le chemin $2 \to 2 \to 3 \to 2$ a une probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times (1-p) = \frac{6-6p}{27}$ et le chemin $2 \to 3 \to 1 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times p \times 1 = \frac{9p}{27}$. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 3|X_0 = 2) = \frac{8}{27} + \frac{6-6p}{27} + \frac{6-6p}{9} + \frac{9p}{27} = \frac{20-3p}{9}$.

(c) Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

Solution: Si X_0 suit une loi μ_0 uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire que

$$\mu_0(\{1\}) = \mu_0(\{2\}) = \mu_0(\{3\}) = \frac{1}{3},$$

Alors X_1 suit une loi μ_1 définie par $\mu_1 = \mu_0 Q$. On a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & \frac{8-3p}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mu_1(\{1\}) = \frac{p}{3},\ \mu_1(\{2\}) = \frac{8-3p}{9} \text{ et } \mu_1(\{3\}) = \frac{1}{9},$$

(d) On suppose que X_0 a pour loi $(1/2, 1/4, 1/4)$.
Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2)$.

Solution: Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 3|X_1 = 2)$$

On sait que $\mathbb{P}(X_2 = 3|X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2) \times \frac{1}{3}.$$

Il nous reste à calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$. On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2) =& \mathbb{P}(X_0 = 1)Q(1,2) + \mathbb{P}(X_0 = 2)Q(2,2) + \mathbb{P}(X_0 = 3)Q(3,2)\\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}(1-p)\\ =& \frac{11-3p}{12}.\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \frac{11-3p}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{11-3p}{36}$$

Ensuite, on a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) =& \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2)\\ =& \frac{11-3p}{12} \times \mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2).\end{aligned}$$

Il n'y a qu'un seul chemin qui amène de 2 à 3 en deux étapes : $2 \to 2 \to 3$ qui est de probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ donc

$$\mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2) = \frac{2}{9}.$$

On en conclut que

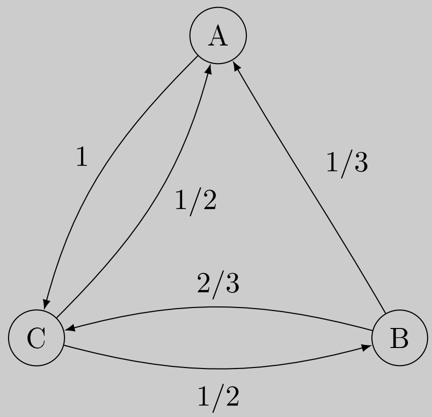
$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) = \frac{11-3p}{12} \times \frac{2}{9} = \frac{11-3p}{54}.$$

2. Anna, Bruno et Carole se lancent un ballon. Anna le lance toujours à Carole ; Carole le lance aux deux autres avec la même probabilité ; Bruno le lance une fois sur trois à Anna, deux fois sur trois à Carole. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$X_n = \begin{cases} A, & \text{si Anna a le ballon après } n \text{ lancers ;}\\ B, & \text{si Bruno a le ballon après } n \text{ lancers ;}\\ C, & \text{si Carole a le ballon après } n \text{ lancers.}\end{cases}$$

(a) Dessiner le graphe de probabilités associé à $(X_n)_{n\geq 0}$ et écrire sa matrice de transition Q.

Solution: La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à pour graphe :



La matrice de transition Q associée à $(X_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = (a_n, b_n, c_n)$ la loi de X_n .

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer μ_{n+1} en fonction de μ_n.

(ii) On suppose que Anna a le ballon au début du jeu. Pour chacun des joueurs, calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers.

Solution:

(i) Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\mu_{n+1} = \mu_n Q.$$

(ii) Calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers pour chacun des joueurs revient à calculer μ_2 pour $\mu_0 = (1, 0, 0)$. On a:

$$\mu_1 = \mu_0 Q = (0, 0, 1).$$

De même,

$$\mu_2 = \mu_1 Q = (1/2, 1/2, 0).$$

On en conclut qu'après deux lancers, Carole n'a presque jamais le ballon, alors qu'Anne et Bruno ont chacun le ballon avec probabilité 1/2.

(c) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une unique probabilité invariante π et la calculer.

Solution: Une probabilité invariante $\pi := (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \pi_A = \dfrac{1}{3}\pi_B + \dfrac{1}{2}\pi_C \\ \pi_B = \dfrac{1}{2}\pi_C \\ \pi_C = \pi_A + \dfrac{1}{2}\pi_B \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}$$

La seule solution de ce système est $\pi = \left(\dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}, \dfrac{6}{13}\right)$.

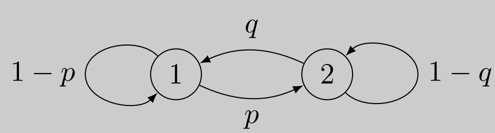
3. On considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [0, 1]$ sont fixés.

(a) Dessiner son graphe. Déterminer la ou les mesures stationnaires.

Solution: Le graphe de la chaîne de Markov est donné par :



Une probabilité invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ satisfait le système suivant:

$$\begin{cases} \pi_1 = (1-p)\pi_1 + q\pi_2 \\ \pi_2 = p\pi_1 + (1-q)\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Si $p = q = 0$, la matrice de transition est l'identité et toute mesure de probabilité est une mesure de probabilité invariante.
Sinon, il y a une unique mesure de probabilité invariante :

$$\pi = (q/(p+q), p/(p+q)).$$

(b) On note $a_n = P(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. Ecrire une relation de récurrence pour les couples (a_n, b_n) et la résoudre.

Solution: On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)Q.$$

De plus $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - a_n$. Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = (1-p)a_n + q(1-a_n) = (1-p-q)a_n + q.$$

Si $p = q = 0$, on a $(a_n, b_n) = (a_0, b_0)$.
Sinon, on a une suite arithmético-géométrique et

$$a_n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left(a_0 - \frac{q}{p+q} \right).$$

De même,

$$b_n = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left(b_0 - \frac{p}{p+q} \right).$$

(c) Etudier alors le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

Solution: On a trois cas de figures possible :

- si $p = q = 0$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 1)$. En particulier la suite converge.
- si $p = q = -1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2 + (-1)^n(\mathbb{P}(X_0 = 1) - 1/2)$ donc la suite ne converge pas sauf si $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$ auquel cas la suite est stationnaire.
- sinon, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ converge exponentiellement vite vers $q/(p+q)$ qui correspond à la probabilité invariante.

4. **Dépenses énergétiques**

On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base, et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$; en revanche, si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude, et l'on passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{3}{4}$.

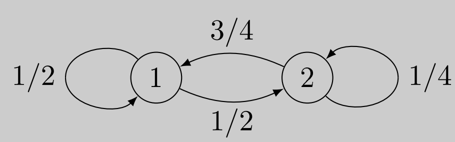
Soit X_n l'état du système au jour numéro n.

(a) Expliquer pourquoi $(X_n)_{n \geq 0}$ peut être modélisé par une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Déterminer sa matrice de transition Q et son graphe.

Solution: On sait que la probabilité d'être dans un état un jour ne dépend que de l'état le jour précédent, on peut donc modéliser le problème par une chaîne de Markov. Les probabilités de transitions ne dépendant pas du jour, la chaîne de Markov est homogène. L'espace d'états comporte deux états : l'état 1 (chauffage de base) et l'état 2 (les deux systèmes). La matrice de transition Q est donnée par :

$$Q := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

et le graphe par :



(b) On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} p_n$?

Solution: On sait que :

$$(p_{n+1}, 1-p_{n+1}) = (p_n, 1-p_n)Q.$$

On a donc

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}.$$

On a une suite arithmético-géométrique donc

$$p_n = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right).$$

On en conclut que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$.

(c) Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant ?

Solution: On cherche à calculer $\mathbb{P}\left(X_{n+7} = 1 | X_n = 1\right)$. La chaîne étant homogène, cela revient à calculer $\mathbb{P}(X_7 = 1|X_0 = 1)$. Si on utilise les notations de la question précédente, cela revient à calculer p_7 pour $p_0 = 1$. On trouve, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(X_7 = 1|X_0 = 1) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^7.$$

(d) Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une proba $\dfrac{3}{5}$, alors il en est de même tous les jours qui suivent.

Solution: On peut montrer ce résultat par récurrence. Soit p_n la probabilité d'être dans l'état 1 le jour n. On sait que $p_0 = \dfrac{3}{5}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $p_n = \dfrac{3}{5}$ alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} =& p_n\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) + (1-p_n)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 2) \\ =& \frac{3}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{3}{4} \\ =& \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Par récurrence on en conclut que si un jour on est dans l'état 1 avec probabilité 3/5 alors tous les jours suivant on est également dans l'état 1 avec probabilité 3/5.

(e) Chaque journée dans l'état 1 coûte 1,5€, et dans l'état 2 coûte 2€. Chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement coûte 0,5€. Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

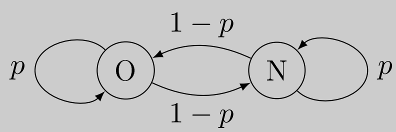
Solution: Dans la situation précédente, toutes les journées sont dans l'état 1 avec probabilité 3/5 et dans l'état 2 avec probabilité 2/5. Une journée dans cette situation coûte donc en moyenne :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_n = 1) \times 1,5 + \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \text{ et } X_n = 1) \times 0,5\\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2) \times 2 + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \text{ et } X_n = 2) \times 0,5\\ =&\frac{3}{5} \times 1,5 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{2}{5} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times 0,5 = 2\text{€}.\end{aligned}$$

5. **Bruit qui court**
Un message pouvant prendre 2 formes (oui ou non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.

(a) Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à 2 états.

Solution: On peut modéliser la situation par la chaîne de Markov donnée par le graphe suivant :



ce qui correspond à la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.
Indication : remarquer que (1, 1) et (1,-1) sont vecteurs propres de Q et diagonaliser Q.

Solution: On remarque que

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2p-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors:

$$A^{-1}QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}.$$

On en conclut donc que

$$Q^n = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}^n A^{-1} = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

La probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale vaut donc $\dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$.

(c) Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?

Solution: On a trois cas de figure possible :

- si $p = 1$, l'information transmise est toujours conforme à l'information initiale, on n'a donc aucune perte d'information,
- si $p = 0$, l'information transmise est toujours conforme à l'information initiale lors des étapes paires, et est l'inverse de l'information initiale lors des étapes impaires,
- sinon, la probabilité que l'information transmise à l'étape n soit conforme à l'information initiale converge vers $\dfrac{1}{2}$.