TD 5: CHAINE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2019-2020

P.-O. Goffard & Rémy Poudevigne

---

1. Soit X_n et Y_n deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.
   (a) Montrer que pour tout $m \leq n$, on a $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s., et donc en particulier que $\mathbb{E}\left[X_m X_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m X_m$ p.s.
   (b) Montrer que pour tout $m < n \leq p < q$, on a Cov $(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

2. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{1\}, ..., \{n\}, [n+1, +\infty[\right)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n = (n+1)\mathbb{I}_{[n+1,+\infty[}$.
   (a)
   - Montrer que pour la filtration $\mathcal{F}_n$, X_n est une martingale positive.
   - Vérifier que $X_n \to 0$ p.s.
   - X_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la valeur de $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(k)$? En déduire $\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right]$.

3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles, positives, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même espérance 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on poste $\mathcal{F}_n = \sigma\left(Y_0, ..., Y_n\right)$ et $X_n = Y_0 ... Y_n$.
   (a) Montrer que X_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale et que $\sqrt{X_n}$ est une $\mathcal{F}_n$-surmartingale.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{Y_k}\right]$ converge dans $\mathbb{R}_+$, on note l sa limite.
   (c) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle régulière ?
   (d) On suppose que $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt{X_n}\right)$ est une suite de Cauchy dans L^2. En déduire que (X_n) est régulière.
   (e) Application : Soit P et Q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E de même loi Q.
   On suppose que pout tout $x \in E$, on a $Q(x) > 0$.
   On pose $X_n = \frac{P(Z_0)}{Q(Z_0)} ... \frac{P(Z_n)}{Q(Z_n)}$.
   Déduire de ce qui précède que $X_n \to 0$ p.s.

4. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(X_k)_{k\geq 1}$, indépendante de N.
   On pose
$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k \, .$$

(a) Déterminer $\mathbb{E}[Y|N]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

(b) Déterminer $\mathrm{Var}(Y|N)$, puis $\mathrm{Var}(Y)$.

(c) Montrer que $L_S = G_N \circ L_X$ où L_Z est la transformée de Laplace de la variable aléatoire Z et G_Z est sa fonction génératrice des probabilités.

5. Soit X_k des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre θ et $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ avec la convention $S = 0$ si $N = 0$. On suppose que N suit une loi binomiale négative (ou loi de Pólya) de paramètres r et p avec r entier. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} p^r (1-p)^n.$$

(a)
- Soit $\theta, x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite I_k définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_k = \int_0^x t^{k-1} \exp(\theta t)\, dt\ .$$

  Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\theta^k}{(k-1)!} I_k = 1 - \exp(\theta x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\theta x)^j}{j!}\ .$$

- Déterminer la fonction de répartition de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(b) Déterminer une expression (avec une somme infinie) de la fonction de répartition de S.

(c)
- Déterminer la fonction génératrice des probabilités d'une v.a. de loi binomiale négative Neg-Bin(r, p) et celle d'une v.a. de loi binomiale Neg-Bin$(r, 1-p)$. Déterminer la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi exponentielle.
- En déduire que la composée d'une loi Neg-Bin(r, p) par la loi Exp(θ) a même fonction génératrice des moments que la composée d'une loi Bin$(r, 1-p)$ par la loi Exp$(p\theta)$.

(d) En déduire une expression simple (avec une somme finie) de la fonction de répartition de S.