EXAMEN FINAL

Calcul Stochastique Appliqué– 2022-2023
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	5	3	4	8	20
Score:					

1. Soit $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ une chaine de Markov en temps continu sur un espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

   (a) (2 points) Après avoir rappeler la définition de la chaine de Markov sous-jacente $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ associée à X, donner sa matrice des transitions.

Solution: Soient $T_1, T_2, \ldots,$ les instants de sauts du processus X alors la chaine de Markov sous-jacente est définie par

$$Z_n = X_{T_n}.$$

Sa marice des ransitions est données par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2 points) Le processus X admet-il une loi stationnaire? Est elle unique? Si oui, donner cette loi de probabilité.

Solution: Comme l'espace d'état est fini alors il existe une mesure de probabilité stationnaire. La chaine de Markov est irréductible donc cette loi est unique, notons là π. La loi stationnaire vérifie $\pi Q = 0$ et $\sum_{x\in E} \pi_x = 1$. On résout le sytème pour obtenir

$$\pi = \begin{pmatrix} 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

(c) (1 point) Expliquer comment simuler une trajectoire du processus X jusqu'à un instant $t > 0$. On pourra écrire un pseudocode pour plus de clarté. On supposera que X_0 suit une loi uniforme discrète sur E.

Solution:

1. Soit $T \leftarrow 0$, $\leftarrow 0$, $Z[0] \sim \text{Uniform}(\{1,2,3\})$, et $\tau[0] \leftarrow 0$
2. Tant que $T < t$
   (a) $k \leftarrow k+1$
   (b) Si $Z[k-1] = 1$ alors simule $\tau[k] \sim \mathsf{Exp}(1)$ et $Z[k] \sim \text{Uniform}(\{2,3\})$
   (c) Si $Z[k-1] = 2$ alors simule $\tau[k] \sim \mathsf{Exp}(2)$ et $Z[k] \sim \text{Uniform}(\{1,3\})$
   (d) Si $Z[k-1] = 3$ alors simule $\tau[k] \sim \mathsf{Exp}(4)$ et $Z[k] \sim \text{Uniform}(\{1,2\})$
   (e) $T \leftarrow T + \tau[k]$
3. $X(t) \leftarrow \sum_{k:\tau[0]+\ldots+\tau[k]<t} Z[k]\mathbb{I}_{[\tau_k,\tau_{k+1})}(t)$

2. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard. Calculer
   (a) (1 point) $\mathbb{P}(B_t > 0)$.

Solution:

$$\mathbb{P}(B_t > 0) = \mathbb{P}(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > 0) = \phi(0) = 1/2$$

(b) (1 point) $\mathbb{E}(|B_t|)$.

Solution:

$$\mathbb{E}(|B_t|) = \mathbb{E}(-B_t\mathbb{I}_{B_t\leqslant 0} + B_t\mathbb{I}_{B_t\geqslant 0}) = \mathbb{E}(-B_t(\mathbb{I}_{B_t\leqslant 0}) + \mathbb{E}(B_t\mathbb{I}_{B_t\geqslant 0})) = 2\mathbb{E}(B_t\mathbb{I}_{B_t>0}) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

(c) (1 point) $\mathbb{E}(B_sB_t^2)$ pour $0 < s < t$.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_sB_t^2) &= \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s + B_s)^2] \\ &= \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)^2 + 2B_s^2(B_t - B_s) + B_s^3] \\ &= \mathbb{E}(B_s^3) = 0\end{aligned}$$

3. Soit $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de dynamique

$$\mathrm{d}X_t = -rX_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t,$$

tel que $X_0 = x$.

(a) (2 points) En appliquant la formule d'Ito sur la fonction $f(t, X_t) = e^{rt}X_t$, exprimer X_t en fonction d'une intégrale de Wiener.

Solution: On applique la formule d'Ito sur la fonction $f(t, X_t) = e^{rt}X_t$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{rt}x,\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{rt},\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

il vient

$$\mathrm{d}(e^{rt}X_t) = \left(re^{rt}X_t - rX_te^{rt} + 1 \cdot 0\right)\mathrm{d}t + 1 \cdot e^{rt}\mathrm{d}B_t = e^{rt}\mathrm{d}B_t.$$

Par intégration entre 0 et t, il vient

$$e^{rt}X_t - x = \int_0^t e^{rs}\mathrm{d}B_s$$

puis

$$X_t = xe^{-rt} + \int_0^t e^{-r(t-s)}\mathrm{d}B_s.$$

(b) (2 points) Donner la loi (avec ses paramètres) de X_t.

Solution: $X_t \sim \mathsf{Normal}\left(xe^{-rt}, \frac{1}{2r}(1 - e^{-2rt})\right)$

4. Les mineurs de la blockchain des bitcoins consomment de l'électricité pour ajouter de nouveaux blocs. Soit $c > 0$ le coût de l'électricité dépensée par unité de temps par un mineur qu'on appelera Sam. Sam découvre des blocs au rythme d'un processus de Poisson $(N_t)_{t \geqslant 0}$ d'intensité λ. La richesse de Sam est modélisée par le processus

$$X_t = x - c \cdot t + N_t \cdot b,\ t \geqslant 0,$$

où $x > 0$ est la richesse initiale et $b > 0$ est la récompense pour trouver un nouveau bloc. On note

$$\tau_0^- = \inf\{t \geqslant 0\ ;\ X_t < 0\}$$

le temps de ruine et

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty),$$

la probabilité de ruine.

(a) (2 points) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$.

Solution: On a

$$\mathbb{E}(X_t) = x - ct + \lambda b \text{ et } \mathrm{Var}(X_t) = \lambda b^2$$

(b) (2 points) Soit

$$Y_t = x - X_t,\ t \geqslant 0.$$

le processus Y est il un processus de Lévy? Si oui, donner son exposant de Laplace

$$\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta Y_1}).$$

Solution: Le processus Y est un processus de Lévy, en effet

1. $Y_0 = 0$
2. $Y_t - Y_s = c(t-s) - b(N_t - N_s)$ est indépendant de Y_s
3. Les accroissement sont stationnaires, on a

$$Y_t - Y_s = c(t-s) - b(N_t - N_s) = c(t-s) - N_{t-s}$$

4. $t \mapsto Y_t$est càdlàg

Son exposant de Laplace est donnée par

$$\kappa(\theta) \log \mathbb{E}(e^{\theta(c-bN_1)}) = \log \left[e^{c\theta}\mathbb{E}(e^{-bN_t}) \right] = c\theta + \lambda(e^{-b\theta} - 1)$$

(c) (1 point) Que vaut $\psi(x)$ si $c > \lambda b$?

Solution: $\psi(x) = 1$, en effet si $c > \lambda b$ alors $X_t \to -\infty$ presque sûrement.

(d) (2 points) Pour quelle valeur $\theta^* > 0$, le processus

$$e^{\theta^* Y_t},\ t \geqslant 0,$$

est une martingale. On pourra exprimer cette valeur θ^* avec la fonction W de Lambert qui vérifie

$$W(z)e^{W(z)} = z, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C},$$

λ, b et c.

Indication: Beaucoup d'équations impliquant des exponentielles peuvent être résolues par l'utilisation de la fonction W. La stratégie générale est de déplacer toutes les instances de l'inconnue d'un côté de l'équation et de faire ressembler ce membre de l'équation à xe^x via des changements de variables. La fonction W fournit alors des solutions puisque

$$xe^x = y \Longleftrightarrow x = W(y).$$

Solution: Le processus $e^{\theta^* Y_t}$ est martingale si $\theta^* > 0$ est choisi tel que $\kappa(\theta^*) = 0$ c'est à dire tel que

$$c\theta + \lambda(e^{-b\theta} - 1) = 0.$$

On écrit

$$e^{b\theta}(c\theta - \lambda) = -\lambda$$

On pose $\tilde{\theta} = c\theta - \lambda$ et il vient

$$e^{b\frac{\tilde{\theta}+\lambda}{c}}\tilde{\theta} = -\lambda$$

On pose $\hat{\theta} = \frac{b\tilde{\theta}}{c}$ et il vient

$$e^{\hat{\theta}}\hat{\theta} = -\lambda\frac{b}{c}e^{-b\frac{\lambda}{c}}$$

On en déduit que

$$\hat{\theta} = W\left(-\lambda\frac{b}{c}e^{-b\frac{\lambda}{c}}\right)$$

puis

$$\tilde{\theta} = \frac{c}{b}W\left(-\lambda\frac{b}{c}e^{-b\frac{\lambda}{c}}\right)$$

et

$$\theta^* = \frac{\lambda}{c} + \frac{1}{b}W\left(-\lambda\frac{b}{c}e^{-b\frac{\lambda}{c}}\right)$$

(e) (1 point) Supposons que $c < \lambda b$, montrer que

$$\psi(x) = e^{-\theta^* x}$$

Indication: Il faut appliquer le théorème du temps d'arrêt optionnel sur le processus $(e^{\theta^* Y_t})_{t\geqslant 0}$ au temps $\tau_0^- \wedge T$, pour $T > 0$.

Solution: Par application du théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau_0^- \wedge T$ sur le processus $\left(e^{\theta^* Y_t}\right)_{t\geqslant 0}$, il vient

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta^* Y_{T\wedge\tau_0^-}}\right) = \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_0}) = 1,$$

d'une part et

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta^* Y_{T\wedge\tau_0^-}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\theta^* Y_T}\mathbb{I}_{T<\tau_0^-}\right) + \mathbb{E}\left(e^{\theta^* Y_{\tau_0^-}}\mathbb{I}_{T>\tau_0^-}\right) \to e^{\theta^* x}\psi(x) \text{ pour } T\to\infty.$$

On en déduit que

$$\psi(x) = e^{-\theta^* x}$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$