# EXAMEN FINAL

Calcul Stochastique Appliqué– 2023-2024

Pierre-O Goffard

***Instructions:*** On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 2 | 4 | 3 | 6 | 15 |
| Score: | | | | | |

1. (2 points) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien. Montrer que le processus défini par

$$X_t = \frac{B_{c^2t}}{c},\ t \geqslant 0,$$

pour $c > 0$ est un mouvement brownien.

**Solution:** On montre qu'il s'agit d'un processus gaussien. Soient $t_1 < t_2$ deux instants et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} a_1X_{t_1} + a_2X_{t_2} &= a_1\frac{B_{c^2t_1}}{c} + a_2\frac{B_{c^2t_2}}{c} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)}{c}B_{c^2t_1} + \frac{a_2}{c}(B_{c^2t_2} - B_{c^2t_1}) \end{aligned}$$

est une va gaussienne comme somme de va gaussiennes indépendantes. On note que

$$\mathbb{E}(X_t) = 0$$

et

$$C(s,t) = Cov(X_s, X_t) = \frac{Cov(B_{c^2 s}, B_{c^2 t})}{c^2} = \frac{c^2 s \wedge c^2 t}{c^2} = s \wedge t.$$

$X_t$ est un processus gaussien dont la fonction de moyenne et de covariance sont identiques à celles du mouvement browninen. Il s'agit donc bien d'un mouvement brownien.

2. Soit $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ et $\mathcal{F}_t$ sa filtration. Soit

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - b N_t),\ t \geqslant 0,$$

où $\mu, b > 0$, la valeur d'un actif financier risqué. On suppose qu'il existe également un actif sans risque telle que

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt},\ t \geqslant 0.$$

On supposera que $S_0 = S_0^0 = 1$.

(a) (1 point) Calculer $E(S_t)$

**Solution:**

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t} \mathbb{E}(e^{-bN_t}) = S_0 \exp(\mu t + \lambda t(e^{-b} - 1))$$

(b) (1 point) On note

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t,\ t \geqslant 0,$$

la valeur actualisée de l'actif au taux sans risque. Déterminer la valeur $\lambda^*$ de $\lambda$ pour que $(\tilde{S}_t)_{t \geqslant 0}$ soit une martingale. On exprimera $\lambda^*$ en fonction de $\mu, r$, et $b$.

**Solution:** Il faut que

$$\lambda^* = \frac{\mu - r}{1 - e^{-b}}.$$

(c) (2 points) La mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est un procesus de Poisson d'intensité $\lambda^*$ correspond à la probabilité risque-neutre. Donner le prix

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \right],$$

où $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0$ est la partie positive, d'un call européen de maturité $T$ et de prix d'exercice $K$ sous $\mathbb{Q}$, en fonction de $r$, $\lambda^*$, $\mu$, $K$, $T$, et de

$$F(x; \lambda) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ x \in \mathbb{N},$$

la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

**Solution:** On a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \right] = e^{-rT} S_0 F(d; \lambda^* e^{-b} T) - K F(d, \lambda^* T),$$

où

$$d = \left\lfloor \frac{\mu T - \ln(K/S_0)}{b} \right\rfloor.$$

3. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien et $(X_t)_{t\geqslant 1}$ un processus d'Itô dont la dynamique est donnée par
$$\mathrm{d}X_t = \left(te^{-t} - \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} + X_t t^{-1}\right)\mathrm{d}t + 2t\mathrm{d}B_t,$$
et $X_1 = 1$.
   (a) (1 point) On définit le processus $Y$ par
$$Y_t = \frac{X_t}{t} - t^{-\frac{1}{2}},\ t \geqslant 1.$$
   Trouver l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus $Y$.

   **Solution:** On applique le lemme d'Ito au processus $Y_t = f(X_t, t)$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} + \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2},\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t},\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$
   On en déduit que
$$\mathrm{d}Y_t = e^{-t}\mathrm{d}t + 2\mathrm{d}B_t.$$

   (b) (1 point) Quel est la loi de $Y_t$ pour $t > 1$?

   **Solution:** En intégrant l'équation de $Y$ entre 1 et $t$, il vient
$$Y_t = e^{-1} - e^{-t} + 2(B_t - B_1)$$
   On en déduit que
$$Y_t \sim \text{Normal}(e^{-1} - e^{-t}, 4(t-1))$$

   (c) (1 point) En déduire la loi $X_t$ pour $t > 1$.

   **Solution:** On a
$$X_t = tY_t + \sqrt{t}$$
   On en déduit que
$$X_t \sim \text{Normal}(t(e^{-1} - e^{-t}) + \sqrt{t}, 4t^2(t-1))$$

4. Soient $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration.
   (a) (1 point) Montrer que $B$ est une martingale. (on admettra que $\mathbb{E}(|B_t|) < \infty$ pour tout $t \geqslant 0$)

   **Solution:** Voir le cours

   (b) (2 points) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On définit les temps d'arrêt
$$\tau_a^+ = \inf\{t \geqslant 0\ ;\ B_t = a\},\ \tau_b^- = \inf\{t \geqslant 0\ ;\ B_t = -b\},\ \text{et}\ \tau = \tau_a^+ \wedge \tau_b^-.$$
   On suppose qu'ils sont finis presque sûrement. Montrer que
$$\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) = \frac{b}{a+b}.$$

Indication: On utilise le théorème du temps d'arrêt sur $B$.

**Solution:** Par application du théorème du temps d'arrêt au temps $\tau$, il vient

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}(B_0) &= \mathbb{E}(B_\tau) \\ &= a\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) - b(1 - \mathbb{P}(\tau = \tau_a^+)) \\ &= (a+b)\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) - b \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) = \frac{b}{a+b}.$$

(c) (1 point) On définit

$$M_t = \int_0^t B_u \mathrm{d}u - \frac{1}{3} B_t^3.$$

Calculer $\mathbb{E}(M_t)$ pour tout $t \geqslant 0$

**Solution:** 0

(d) (1 point) Montrer que $(M_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale. (on admettra que $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$, pour tout $t \geqslant 0$)
Indication: On a pour $s < t$

$$\mathbb{E}\left( \int_s^t B_u \mathrm{d}u \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_s^t \mathbb{E}\left( B_u | \mathcal{F}_s \right) \mathrm{d}u = \int_s^t B_s \mathrm{d}u = B_s \cdot (t-s)$$

**Solution:** Soit $s < t$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left( \int_0^t B_u \mathrm{d}u - B_t^3 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbb{E}\left( \int_0^s B_u \mathrm{d}u + \int_s^t B_u \mathrm{d}u - (B_t - B_s + B_s)^3 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \int_0^s B_u \mathrm{d}u + B_s \cdot (t-s) - \frac{1}{3}\left( \mathbb{E}(B_t - B_s)^3 + B_s^3 + 3B_s(t-s) \right) \\ &= M_s. \end{aligned}$$

(e) (1 point) Déduire des questions précédentes (b et d en particulier) que l'aire sous $(B_t)_{t \geqslant 0}$ jusqu'à $\tau$ est en moyenne égale à

$$\frac{ab(a-b)}{3}.$$

Indication: On utilise le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau$ sur le processus $(M_t)_{t \geqslant 0}$.

**Solution:**

$$0 = \mathbb{E}(M_0) \quad = \quad \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau B_u \mathrm{d}u\right) - \frac{1}{3}\mathbb{E}(B_\tau^3)$$

On déduit que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau B_u \mathrm{d}u\right) = \frac{1}{3}\left(a^3 \frac{b}{a+b} - b^3 \frac{a}{a+b}\right) = ab(a-b)/3$$

# FORMULAIRE

| Nom | abbrev. | Loi | $\mathbb{E}(X)$ | $\mathrm{Var}(X)$ | $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Binomial | $\mathrm{Bin}(n,p)$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=1,\dots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | $[(1-p)+pe^t]^n$ |
| Poisson | $\mathrm{Pois}(\lambda)$ | $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\ k\geqslant 0$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp(\lambda(e^t-1))$ |
| Geometric | $\mathrm{Geom}(p)$ | $(1-p)^{k-1}p,\ k\geqslant 1$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{1-p}{p^2}$ | $\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$ |
| Uniform | $\mathrm{Unif}(a,b)$ | $\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$ |
| Exponential | $\mathrm{Exp}(\lambda)$ | $\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ | $\dfrac{1}{\lambda}$ | $\dfrac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$ |
| Normal | $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ | $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$ |