EXAMEN FINAL

Calcul Stochastique Appliqué– 2024-2025
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	3	4	4	4	2	17
Score:						

1. (a) (1 point) Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, calculer (en détaillant)

$$\text{Cov}(N_t, N_s), \text{ pour } s, t > 0.$$

Solution: Supposons $t > s$,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(N_t, N_s) &= \text{Cov}(N_t, N_s)\\ &= \text{Cov}(N_t - N_s + N_s, N_s)\\ &= \text{Cov}(N_t - N_s, N_s) + \text{Cov}(N_s, N_s)\\ &= 0 + \lambda \cdot s.\end{aligned}$$

Si $s > t$, alors $\text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda \cdot t$, on en déduit que

$$\text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda \cdot s \wedge t$$

(b) (2 points) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien. Montrer que le processus défini par

$$X_t = t \cdot B_{1/t},\ t > 0,$$

est un mouvement brownien.

Solution: On montre qu'il s'agit d'un processus gaussien. Soient $t_1 < t_2$ deux instants et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} &= a_1 t_1 B_{1/t_1} + a_2 t_2 B_{1/t_2} \\ &= a_1 t_1 (B_{1/t_1} - B_{1/t_2} + B_{1/t_2}) + a_2 t_2 B_{1/t_2} \\ &= a_1 t_1 (B_{1/t_1} - B_{1/t_2}) + (a_1 t_1 + a_2 t_2) B_{1/t_2} \end{aligned}$$

est une va gaussienne comme somme de va gaussiennes indépendantes. On note que

$$\mathbb{E}(X_t) = 0$$

et pour $s < t$

$$C(s,t) = Cov(X_s, X_t) = Cov(sB_{1/s}, tB_{1/t}) = ts\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = s.$$

On remarque que pour $t < s$, $C(s,t) = t$. X_t est donc un processus gaussien dont la fonction de moyenne et de covariance sont identiques à celles du mouvement browninen. Il s'agit donc bien d'un mouvement brownien.

2. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration. On définit le processus Y_t par

$$Y_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot B_t,$$

avec $\mu, \sigma > 0$.

(a) (2 points) Montrer que $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale (3 conditions à vérifier)

Solution:

(i) $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est $\mathcal{F}_t-$adapté

(ii) On a

$$\mathbb{E}(|B_t|) = 2\mathbb{E}(B_t \mathbb{I}_{B_t>0}) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty \text{ pour tout } t > 0.$$

(iii) On a pour $s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= 0 + B_s = B_s. \end{aligned}$$

$(B_t)_{t\geqslant 0}$ est bien une $\mathcal{F}_t-$martingale.

(b) (2 points) On définit le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 \ ; \ Y_t = a\}, \text{ pour } a > 0,$$

que l'on supposera borné. Calculer $\mathbb{E}(\tau_a)$ en appliquant le théorème du temps d'arrêt optionnel à une martingale bien choisie.

Solution: Voir le TD4

3. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement Brownien et

$$Z_t = \int_0^t B_s \mathrm{d}s, \ t \geqslant 0.$$

(a) (2 points) En appliquant la formule d'Ito à $f(t, B_t) = t \cdot B_t$, montrer que Z_t est une variable aléatoire gaussienne pour tout $t > 0$.

Solution: Par application de la formule d'Ito à

$$f(t, B_t) = t \cdot B_t,$$

il vient

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B_t, \ \frac{\partial f}{\partial x} = t \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

puis

$$\mathrm{d}\left(t \cdot B_t\right) = \left(t \cdot B_t + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \mathrm{d}t + t\mathrm{d}B_t.$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient

$$t \cdot B_t = \int_0^t B_s \mathrm{d}s + \int_0^t s\mathrm{d}B_s$$

et finalement

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}s = t \cdot B_t - \int_0^t s\mathrm{d}B_s.$$

On ne peut pas conclure directement que $\int_0^t B_s \mathrm{d}s$ est une variable aléatoire gaussienne car $t \cdot B_t$ et $\int_0^t s\mathrm{d}B_s$ sont corrélées. Pour conclure, il faut écrire

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}s = t \int_0^t \mathrm{d}B_s - \int_0^t s\mathrm{d}B_s = \int_0^t (t-s)\mathrm{d}B_s,$$

qui est un va gaussienne pour tout $t \geqslant 0$.

(b) (2 points) Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$ et $\mathbb{V}(Z_t)$.

Solution: On a

$$\mathbb{E}(X_t) = 0$$

et

$$\mathbb{V}(X_t) = \int_0^t (s-t)^2 \mathrm{d}s = \frac{t^3}{3}.$$

4. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de naissance-mort dont les taux de naissance et de mort sont donnés respectivement par
$$\lambda_{x-1} = \lambda \text{ et } \mu_x = x \cdot \mu, \text{ pour } x \geqslant 1.$$
   (a) (2 points) Déterminer la loi stationnaire du processus.

   Solution: Une loi réversible $(\pi_x)_{x\geqslant 0}$ existe si
$$S = \sum_{x\geqslant 1} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda_{x-1}}{\mu_x} < \infty$$
   On vérifie que
$$S = \sum_{x\geqslant 1} \frac{1}{x!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x = (e^{\lambda/\mu} - 1) < \infty.$$
   On en déduit que
$$\pi_0 = e^{-\lambda/\mu} \text{ et } \pi_x = \frac{e^{-\lambda/\mu}}{x!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x.$$
   La loi de stationnaire est une loi de Poisson de paramètre λ/μ

   (b) (2 points) Donner sa moyenne et sa variance.

   Solution: Comme $X_\infty \sim \text{Pois}(\lambda/\mu)$ alors
$$\mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{V}(X_\infty) = \lambda/\mu.$$

5. (2 points) Soit $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi
$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p$$
Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie par
$$Z_0 = 0,\ Z_{n+1} = Z_n + \xi_{n+1},\ \text{pour } n \geqslant 1,$$
et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ sa filtration. Montrer que le processus défini par
$$X_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{Z_n},\ n \geqslant 0$$
est une $\mathcal{F}_n-$martingale (3 conditions à vérifier).

Solution:

(i) Comme Z_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable alors X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable en tant que fonction continue de Z_n.

(ii) On a
$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Z_n}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi_1}\right]^n = 1 < \infty.$$

(iii) On a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[X_n \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi}_{n+1} |\mathcal{F}_n\right] = X_n \cdot \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\xi}_{n+1})\right] = X_n.$$

$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bien une $\mathcal{F}_n-$martingale.

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\geqslant 0$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p,\ k\geqslant 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$