ENTRAINEMENT EXAMEN

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. Soit $S = (S_n)_{n\geq 0}$ un processus défini par

$$S_0 = 0, \text{ et } S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \; n \geq 1,$$

où $(\xi_i)_{i\geq 1}$ ets une suite de v.a. i.i.d. telles que

$$\mathbb{P}(\xi_i = -1) = \mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1/2.$$

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, i \leq n)$, la filtration du processus S.

(a) Montrer que S est une $\mathcal{F}_n-$martingale.

Solution: Vu en cours

(b) Montrer que

$$Y_n = S_n^2 - n, \; n \geq 1.$$

est une $\mathcal{F}_n-$martingale.

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2 - n - 1|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n) - n - 1 \\
&= \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - n - 1 \\
&= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) - n - 1 \\
&= S_n^2 + 0 + 1 - n - 1 \\
&= S_n^2 - n = Y_n
\end{aligned}$$

(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a, b > 0$, on définit

$$\tau_a^+ = \inf\{n \geq 0 \; ; \; S_n = a\}, \; \tau_a^- = \inf\{n \geq 0 \; ; \; S_n = -b\}, \text{ et } \tau = \tau_a^+ \wedge \tau_b^-.$$

Montrer que τ_a^+, τ_b^- et τ sont des temps d'arrêts.

Solution: On a

$$\{\tau_a^+ = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{S_k < a\} \cap \{S_n = a\} \in \mathcal{F}_n$$

et

$$\{\tau_b^- = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{S_k > -b\} \cap \{S_n = b\} \in \mathcal{F}_n.$$

On en déduit que τ_a^+ et τ_b^- sont des temps d'arrêt. τ est un temps d'arrêt en tant que minimum de temps d'arrêt, en effet le minimum de deux applications mesuarbales est une application mesurable.

(d) Calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+).$$

Indication: Il faut utiliser le théorème de temps d'arrêt.

Solution: On note d'abord que

$$\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) = 1 - \mathbb{P}(\tau = \tau_b^-).$$

On applique le théorème du temps d'arrêt au temps τ, il vient

$$\mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(S_0) = 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau) &= \mathbb{E}(S_{\tau_a^+}\mathbb{I}_{\tau=\tau_a^+} + S_{\tau_b^-}\mathbb{I}_{\tau=\tau_b^-}) \\ &= a\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) - b\mathbb{P}(\tau = \tau_b^-) \\ &= (a+b)\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) - b \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) = \frac{b}{a+b}.$$

(e) Calculer $\mathbb{E}(\tau)$.
Indication: Il faut utiliser le théorème de temps d'arrêt et le processus Y.

Solution: On applique le théorème du temps d'arrêt en τ sur le processus Y. Il vient

$$\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}(Y_0) = 0,$$

d'une part. D'autre part, on a

$$\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}(S_\tau^2) - \mathbb{E}(\tau)$$

On en déduit que $\mathbb{E}(S_\tau^2) = \mathbb{E}(\tau)$, or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \mathbb{E}(S^2_{\tau_a^+}\mathbb{I}_{\tau=\tau_a^+} + S^2_{\tau_b^-}\mathbb{I}_{\tau=\tau_b^-}) \\ &= a^2\mathbb{P}(\tau = \tau_a^+) + b^2\mathbb{P}(\tau = \tau_b^-) \\ &= a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = ab \end{aligned}$$

2. Soit $Y \sim \mathsf{Normal}(0,1)$, le processus

$$X_t = \sqrt{t}Y,$$

est-il un mouvement brownien standard?

Solution: Non, par exemple

$$X_t - X_s \sim \mathsf{Normal}(0, t + s - \sqrt{ts}).$$

3. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration.

   (a) Le processus

   $$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at},\ t \geq 0 \text{ pour } a > 0,$$

   est il un mouvement brownien?

   Solution: On a

   1. $X_0 = 0$
   2. X_t et $X_{s+t} - X_s$ sont indépendants pour tout $s, t > 0$
   3. $X_{s+t} - X_s \mathsf{Normal}(0, t)$ pour tout $s, t > 0$
   4. $t \mapsto X_t$ est continue par opération sur les fonctions continues.

   On peut aussi vérifier que X_t est un processus gaussien avec

   $$b_1 X_{t_1} + b_2 X_{t_2} = \left(\frac{b_1}{\sqrt{a}} + \frac{b_2}{\sqrt{a}} \right) B_{at_1} + \frac{b_2}{\sqrt{a}} (B_{at_2} - B_{at_1}),\ \text{pour } t_1 < t_2 \text{ et } b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

   de fonction de moyenne

   $$m(t) = \mathbb{E}(X_t) = 0$$

   et de fonction de covariance donnée par

   $$\begin{aligned} C(s,t) &= \mathsf{Cov}(X_s, X_t) \\ &= \mathsf{Cov}(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{as}, \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}) \\ &= \frac{1}{a} \mathsf{Cov}(B_{as}, B_{at}) \\ &= \frac{1}{a} as \wedge at \\ &= s \wedge t. \end{aligned}$$

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_7 | X_5, X_3)$.

   Solution: $\mathbb{E}(X_7 | X_5, X_3) = \mathbb{E}(X_7 | X_5) = \mathbb{E}(X_7 - X_5 + X_5 | X_5) = X_5$

   (c) Calculer $\mathbb{E}(X_7 X_5 X_3)$

   Solution: $\mathbb{E}(X_7 X_5 X_3) =$

   (d) Montrer que

   $$M_t = \exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} t),\ t \geq 0.$$

   est une martingale.

Solution: