

# TD 1: MARCHE ALÉATOIRE ET MARTINGALE EN TEMPS DISCRET.

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2  
P.-O. Goffard

---

1. Soit  $\{X_t ; t \in \mathbb{N}\}$  une chaîne de Markov homogène d'espace d'état  $\{1, 2, 3, 4\}$  et de matrice de transition,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 1/10 & 6/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Soit  $A = \{1, 4\}$ , donner  $\mathbb{E}_x(\tau_A)$  pour  $x \in E$

**Solution:** On a  $\mathbb{E}_1(\tau_A) = \mathbb{E}_4(\tau_A) = 0$  et on résout le système

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0(\tau_A) = 1 + \frac{3}{10}\mathbb{E}_0(\tau_A) + \frac{5}{10}\mathbb{E}_2(\tau_A) \\ \mathbb{E}_2(\tau_A) = 1 + \frac{1}{10}\mathbb{E}_0(\tau_A) + \frac{6}{10}\mathbb{E}_2(\tau_A) \end{cases}$$

- (b) On définit

$F =$  'Absorption dans l'état 4'

et

$G =$  "L'état 2 est visité juste avant l'absorption"

Calculer  $\mathbb{P}_x(F)$  et  $\mathbb{P}_x(G)$  pour  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Solution:** On a  $\mathbb{P}_1(F) = 0$  et  $\mathbb{P}_4(F) = 1$ . On note que pour  $x \in \{1, 2\}$ , on a

$$\mathbb{P}_x(F) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y(F) Q(x, y).$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0(F) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathbb{P}_0(F) + \frac{5}{10}\mathbb{P}_2(F) \\ \mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\mathbb{P}_0(F) + \frac{6}{10}\mathbb{P}_2(F). \end{cases}$$

On effectue le même raisonnement pour  $\mathbb{P}_x(G)$ .

- (c) Ouvrir le fichier `absorbing_time_boiler.ipynb` (Illustration analyse à un pas) sur moodle
2. Un joueur entre dans un casino. il paie \$1 pour jouer à un jeu.

- Il gagne et remporte \$2 avec probabilité  $p \in (0, 1)$
- Il perd et remporte \$0 avec probabilité  $q = 1 - p$

Soit  $(X_n)_n$  sa richesse, avec  $X_0 = x \geq 0$ . On suppose que le joueur rentre chez lui si sa richesse tombe à 0 ou si elle atteint un niveau  $a \geq x$ . Soit les temps aléatoires

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; X_n = 0\} \text{ et } \tau_a = \inf\{n \geq 0 ; X_n = a\}.$$

On suppose que  $x, a \in \mathbb{N}$  et on souhaite calculer la probabilité

$$\psi(x, a) = \mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_a) = \mathbb{P}(\tau_0 < \tau_a | X_0 = x).$$

que le joueur rentre à la maison ruiné.

(a) Supposons que  $p \neq q$ , calculer  $\psi(x, a)$  via une analyse à un pas.

Indications 1: Que valent  $\psi(0, a)$  et  $\psi(a, a)$ ?

Indications 2: Combiner à l'équation issue de l'analyse à un pas avec l'équation

$$\psi(x, a) = p\psi(x, a) + q\psi(x, a).$$

Indications 3: définir la suite

$$u_x = \psi(x, a) - \psi(x - 1, a), \text{ pour } x \geq 1$$

**Solution:** Si  $x = 0$  alors  $\tau_0 = 0 < \tau_a$  donc  $\psi(0, a) = 1$ . Si  $x = a$  alors  $\tau_a = 0 < \tau_0$  et  $\psi(a, a) = 0$ . Supposon que  $0 < x < a$ , via l'analyse à un pas on a

$$\psi(x, a) = p\psi(x + 1, a) + q\psi(x - 1, a) \tag{1}$$

on a également

$$\psi(x, a) = p\psi(x, a) + q\psi(x, a) \tag{2}$$

Par différence entre (1) et (2), il vient

$$pu_{x+1} + qu_x = 0,$$

avec  $u_x = \psi(x, a) - \psi(x - 1, a)$ , pour  $x \geq 1$ . On en déduit que

$$u_x = \frac{q}{p}u_{x-1} = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} u_1.$$

On note que

$$\sum_{z=1}^x u_z = \psi(x, a) - 1 = u_1 \frac{1 - (q/p)^x}{1 - q/p}$$

et

$$\sum_{z=1}^a u_z = \psi(a, a) - 1 = -1 = u_1 \frac{1 - (q/p)^a}{1 - q/p}.$$

On a donc  $u_1 = -\frac{1 - q/p}{1 - (q/p)^a}$  et

$$\psi(x, a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a}.$$

(b) Même question en supposant que  $p = q$ .

**Solution:** En reprenant les notation précédente, on a

$$u_x = u_{x-1} = \dots = u_1$$

On en déduit que

$$\sum_{z=1}^x u_z = \psi(x, a) - 1 = xu_1,$$

et

$$\sum_{z=1}^a u_z = \psi(a, a) - 1 = -1 = au_1.$$

On a donc  $u_1 = -1/a$  et

$$\psi(x, a) = (x - a)/a.$$

3. On montre le résultat de l'exercice précédent en utilisant les martingales et le théorème du temps d'arrêt optionnel

(a) les temps  $\tau_0$  et  $\tau_a$  sont-ils des temps d'arrêts.

**Solution:** Vu en cours

(b) Qu'en est il pour  $\tau_0 \wedge \tau_a$ ?

**Solution:** On a

$$\{\tau_0 \wedge \tau_a \geq n\} = \{\tau_0 \geq n\} \cap \{\tau_a \geq n\} \in \mathcal{F}_N$$

(c) Montrer que  $\mathbb{P}_x(\tau_a \wedge \tau_0 < \infty) = 1$ .

Indication: Soit  $\tau = \tau_0 \wedge \tau_a$ , On peut montrer que  $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ . pour ce faire, exprimez  $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n})$  en fonction de  $\mathbb{E}(\tau \wedge n)$ .

**Solution:** Soit  $\tau = \tau_0 \wedge \tau_a$ , on a pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) &= x + \mathbb{E}\left(\sum_k^{\tau \wedge n} \xi_k\right) \\ &= x + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_k^{\tau \wedge n} \xi_k \mid \tau \wedge n\right)\right] \\ &= x + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_k^{\tau \wedge n} \xi_k \mid \tau \wedge n\right)\right] \\ &= x + \mathbb{E}[\tau \wedge n \mathbb{E}(\xi)] \\ &= x + \mathbb{E}(\tau \wedge n)(2p - 1) \end{aligned}$$

Comme  $X_{\tau \wedge n} \in (0, a)$  alors  $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) \in (0, a)$  et  $\mathbb{E}(\tau \wedge n)$  est fini pour tout  $n \geq 0$ , en particulier pour  $n \rightarrow \infty$ . Comme  $\mathbb{E}(\tau \wedge n) < \infty$  alors  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ .

(d) Supposons que  $p = q$ , montrer que  $X_n$  est une martingale.

**Solution:** Soit  $(\xi_i)_{i \geq 0}$  une suite i.i.d. de v.a. distribuées comme  $\xi$  avec

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = q$$

On a

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n.$$

Soit  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$  une filtration adaptée au processus  $X$ . On a

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} + \mathbb{E}(\xi_n) = X_{n-1} + 1 + 2p - 1 = X_{n-1}.$$

$X$  est bien une  $\mathcal{F}_n$ -martingale.

(e) En déduire  $\psi(x, a)$  en appliquant le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps  $\tau_a \wedge \tau_0$ .

**Solution:** Par application du temps d'arrêt optionnel au temps  $\tau_a \wedge \tau_0$ , on a

$$x = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge \tau_0}) = \mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbb{I}_{\tau_a < \tau_0} + X_{\tau_0} \mathbb{I}_{\tau_0 < \tau_a}) = a(1 - \psi(x, a)).$$

puis après ré-arrangement

$$\psi(x, a) = \frac{x - a}{a}.$$

(f) Supposons que  $p \neq q$ , A quel condition  $(e^{\theta^* X_n})_{n \geq 0}$  est une martingale?

**Solution:** D'après le cours, le processus

$$M_n = \exp(\theta X_n - n\kappa(\theta)), \text{ pour } n \geq 1,$$

où  $\kappa(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta \xi})$ , est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale. On cherche donc  $\theta^*$  tel que

$$\kappa(\theta) = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\ln(pe^\theta + qe^{-\theta}) = 0 \Leftrightarrow pe^\theta + qe^{-\theta} = 1.$$

On procède au changement de variable  $u = e^\theta$  pour aboutir à

$$pu^2 - u + q = 0.$$

On trouve deux racines réelles (remplace  $q$  par  $1 - p$ )

$$u_1 = 1 \text{ et } u_2 = \frac{q}{p}$$

puis

$$\theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \ln\left(\frac{q}{p}\right).$$

On choisit  $\theta^* = \ln\left(\frac{q}{p}\right)$  et le processus  $(e^{\theta^* X_n})_{n \geq 0}$  est une martingale.

- (g) En déduire  $\psi(x, a)$  en appliquant le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps  $\tau_a \wedge \tau_0$  et au processus  $(e^{\theta^* X_n})_{n \geq 0}$ .

**Solution:** On applique le théorème du temps d'arrêt optionnel, on a

$$e^{\theta^* x} = \mathbb{E}(e^{\theta^* X_0}) = \mathbb{E}(e^{\theta^* X_{\tau_a \wedge \tau_0}}) = \psi(x, a) + [1 - \psi(x, a)]e^{\theta^* a}.$$

Après ré-arrangement, il vient

$$\psi(x, a) = \frac{e^{\theta^* x} - e^{\theta^* a}}{1 - e^{\theta^* a}} = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a}.$$