TD 2: PROCESSUS EN TEMPS CONTINU ET MARTINGALE

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. (a) (2 points) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Le processus

$$X_n = N_n,\ n \geq 0$$

définit-il une chaine de Markov? Justifier votre réponse, s'il s'avère que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov alors on donnera sa matrice des transition et son espace d'état.

Solution: On note que

$$X_{n+1} = X_n + (N_{n+1} - N_n),$$

La suite $\xi_n = N_{n+1} - N_n,\ n \geq 1$ forme une suite de va iid puisque N_t est un processus de Poisson. On en déduit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une CMH en vertu du théorème qui introduit le protocole générateur de chaine de Markov. L'espace d'état est $E = \mathbb{N}$ et la matrice des transition est donnée par

$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

(b) (2 points) Soit le processus

$$M_t = U_1 + \ldots + U_{N_t}$$

où $U_1, \ldots, U_{N_t}$ sont iid de loi normale Normal(μ, σ^2) et indépendants de $(N_t)_{t\geq 0}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\Big|N_t > 0\right) = \frac{\mathbb{E}(M_t)}{\mathbb{E}(N_t)}$$

Solution: On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\Big|N_t > 0\right) &= \frac{\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\mathbb{I}_{N_t>0}\right)}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{U_1 + \ldots U_k}{k}\mathbb{I}_{N_t=k}\right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N_t = k) = \mu \end{aligned}$$

L'intervertion série intégrale est justifié grâce au résultat suivant:

Proposition 1 *Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite d'application mesurables telle que*

$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}|f_k| < \infty$$

alors $\sum_{k\geq 1} f_k$ est intégrable et

$$\mathbb{E}\sum_{k\geq 1} f_k = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}(f_k).$$

0Ici, on définit $f_k = \dfrac{U_1 + \ldots + U_k}{k} \mathbb{I}_{N_t = k}$ et on note que

$$|f_k| \leq \frac{|U_1| + \ldots + |U_k|}{k} \mathbb{I}_{N_t = k}$$

par l'inégalité triangulaire. Le passage à l'espérance donne

$$\mathbb{E}(|f_k|) \leq \mathbb{E}(|U|)\mathbb{P}(N_t = k).$$

La sommation donne

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(|f_k|) \leq \mathbb{E}(|U|)\mathbb{P}(N_t > 0) < \infty.$$

On peut également utiliser la loi de l'espérance totale pour ne pas s'embéter avec une interversion limite intégrale. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\Big| N_t > 0\right) &= \frac{\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\mathbb{I}_{N_t > 0}\right)}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\mathbb{I}_{N_t > 0}|N_t\right)\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(M_t|N_t\right)\frac{\mathbb{I}_{N_t > 0}}{N_t}\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[N_t\mathbb{E}\left(U_1|N_t\right)\frac{\mathbb{I}_{N_t > 0}}{N_t}\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mu\mathbb{I}_{N_t > 0}\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mu\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{N_t > 0}\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \frac{\mu\mathbb{P}\left[N_t > 0\right]}{\mathbb{P}(N_t > 0)} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(M_t)}{\mathbb{E}(N_t)} &= \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t|N_t))}{\lambda t} \\
&= \frac{\mathbb{E}(N_t)\mathbb{E}(U)}{\lambda t} = \mu
\end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\Big| N_t > 0\right) = \frac{\mathbb{E}(M_t)}{\mathbb{E}(N_t)}.$$

2. Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale telle que $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout $0 \leq s < t$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2)$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2|\mathcal{F}_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2|\mathcal{F}_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2M_s^2 + M_S^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s)\right] - \mathbb{E}(M_s^2) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2)
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $t \mapsto \phi(t) = \mathbb{E}(M_t^2)$ est croissante.

Solution: Soit $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(t+h) - \phi(t) &= \mathbb{E}(M_{t+h}^2) - \mathbb{E}(M_t^2) \\
&= \mathbb{E}\left[(M_{t+h} - M_t)^2\right] \geq 0
\end{aligned}$$

3. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue telle que $M_0 = a$ et $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$. Montrer que $\sup_{t\geq 0} M_t \sim \frac{a}{U}$, où $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.
Indication: Quel est le lien entre $\sup_{t\geq 0} M_t$ et

$$\tau_y^+ = \inf\{t \geq 0 \; ; \; M_t > y\}, \text{ pour } y > a.$$

Solution: On note que

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t > y) = \mathbb{P}(\tau_y^+ < \infty),$$

On applique le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau_y^+ \wedge t$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
a &= \mathbb{E}(M_0) \\
&= \mathbb{E}(M_{\tau_y^+ \wedge t}) \\
&= \mathbb{E}(M_{\tau_y^+}\mathbb{I}_{\tau_y^+ < t} + M_t\mathbb{I}_{\tau_y^+ \geq t}) \\
&= \mathbb{E}(y\mathbb{I}_{\tau_y^+ < t} + M_t\mathbb{I}_{\tau_y^+ \geq t})
\end{aligned}$$

On fait tendre t vers ∞ pour obtenir

$$\mathbb{P}(\tau_y^+ < \infty) = \frac{a}{y},$$

ce qui correspond à la fonction de survie de $\frac{a}{U}$.

4. Les longueurs de deux branches concurrentes de la blockchain sont modélisées par deux processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ indépendants, d'intensité respectives λ et μ. On se place dans le scénario d'une attaque par double dépense et on suppose que la branche malhonnête est celle dont la longueur est modélisée par M. Les mineurs malhonnêtes ne détiennent pas la majorité des ressources de calculs ce qui se traduit par $\mu < \lambda$. La branche honnête possède $z \geq 0$ bloc d'avance sur la chaine malhonnête. La double dépense se produit si la chaine malhonnête rattrape la chaine honnête, c'est à dire à l'instant aléatoire

$$\tau_z = \inf\{t \geq 0 \; ; \; z + N_t - M_t = 0\}.$$

On définit la probabilité d'une double dépense par

$$\phi(z) = \mathbb{P}(\tau_z < \infty).$$

On définit le processus $Y_t = M_t - N_t,\ t \geq 0$.

(a) Y est-il un processus de Lévy?

Solution:

1. $Y_0 = 0$
2. les trajectoires de Y_t son càdlàg
3. Accroissement indépendants
4. Accroissement stationnaires

(b) Que vaut $\lim_{t\to\infty} Y_t$?

Solution: $-\infty$

(c) Donner l'exposant de Laplace

$$\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta Y_1}).$$

de Y.

Solution:

$$\begin{aligned}
\kappa(\theta) &= \log \mathbb{E}\left(e^{\theta(M_1 - N_1)}\right) \\
&= \log \mathbb{E}\left(e^{\theta M_1}\right) + \log \mathbb{E}\left(e^{-\theta N_1}\right) \\
&= \mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1) + \lambda(\mathrm{e}^{-\theta} - 1)
\end{aligned}$$

(d) Montrer que

$$\phi(z) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^z.$$

<u>Indication:</u> Il faut trouver $\theta^* > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\theta^* Y_t}$ soit une martingale puis appliquer le théorème du temps d'arrêt optimal.

Solution: On cherche θ^* tel que

$$\kappa(\theta^*) = 0 \Leftrightarrow \mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1) + \lambda(\mathrm{e}^{-\theta} - 1) = 0.$$

On pose $u = \mathrm{e}^{\theta}$, l'équation devient $\mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1) + \lambda(\mathrm{e}^{-\theta} - 1) = 0$ Les solutions sont 1 et λ/μ. La seule solution strictement positive de l'équation initiale est donc $\theta^* = \log \lambda/\mu$. On note que

$$\tau_z = \inf\{t \geq 0\ ;\ Y_t = z\}.$$

Par application du théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau_z \wedge t$ sur le processus $\mathrm{e}^{\theta^* Y_t}$, il vient

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta^* Y_0}) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta^* Y_{\tau_z \wedge t}}) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta^* Y_{\tau_z}} \mathbb{I}_{\tau_z < t} + \mathrm{e}^{\theta^* Y_t} \mathbb{I}_{\tau_z \geq t})
\end{aligned}$$

On fait tendre t vers $+\infty$ pour obtenir

$$\mathbb{P}(\tau_z < \infty) = \mathrm{e}^{-\theta^* z} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^z.$$