TD 3: CHAINE DE MARKOV EN TEMPS CONTINU

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Donner la loi des temps de séjour dans chacun des états. Combien de temps en moyenne le processus reste-t-il dans chacun des états?

Solution: On note ρ_x pour $x \in E$ les temps de séjour dans chacun des états. On a

- $\rho_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$ et $\mathbb{E}(\rho_1) = 1$
- $\rho_2 \sim \mathsf{Exp}(2)$ et $\mathbb{E}(\rho_2) = 1/2$
- $\rho_3 \sim \mathsf{Exp}(4)$ et $\mathbb{E}(\rho_3) = 1/4$

(b) Donner la matrice des transitions P de la chaine de Markov immergée de X, définie par

$$Z_n = X_{T_n},\ n \geq 0,$$

où les T_n sont les instants de saut de X.

Solution: On a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Le processus X admet-il une loi stationnaire, si oui l'expliciter.

Solution: Le processus X est une chaine de Markov irréductible sur un espace d'état fini, il existe donc une unique loi stationnaire qui vérifie $\pi Q = 0$ et $\sum_x \pi_x = 1$. Après résolution du système, il vient

$$\pi = \begin{pmatrix} 6/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

2. Soit un système comprenant c serveur, des paquets de données arrive au rythme d'un processus de Poisson d'intensité λ. Un serveur traite un paquet de donnée en un temps exponentielle de paramètre noté μ. Le processus X modélise le nombre de paquets de données dans le système.

(a) Le processus est-il un processus de naissance-mort? Si oui quel sont ces taux de naissance et de décès?

Solution: Il s'agit d'un processus de naissance mort (il s'agit plus précisément d'une file d'attente de type $M/M/c$). Les taux de naissance siont constants égaux à λ. Les taux de décès sont données par

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{si } k < c, \\ c\mu, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) A quelle condition le processus admet-il une loi stationnaire? Auquel cas expliciter cette loi stationnaire.

Solution: On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} & (1)\\ &= \sum_{x=1}^{c-1} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda}{k\mu} + \sum_{x=c}^{\infty} \prod_{k=1}^{c} \frac{\lambda}{k\mu} \prod_{k=c+1}^{x} \frac{\lambda}{c\mu} & (2)\\ &= \sum_{x=1}^{c-1} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda}{k\mu} + \sum_{x=c}^{\infty} \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \frac{\lambda^{x-c}}{c^{x-c}\mu^{x-c}} & (3)\\ &= \sum_{x=1}^{c-1} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda}{k\mu} + \sum_{x=c}^{\infty} \frac{\lambda^x}{c!\mu^x c^{x-c}} & (4) \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une unique loi stationnaire si $c\mu > \lambda$, auquel cas, on a

$$S = \sum_{x=1}^{c-1} \prod_{k=1}^{x} \frac{\lambda}{k\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}},$$

puis $\pi(0) = (1 + S)^{-1}$ et enfin

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi(0)}{x!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^x, & \text{si } x < c \\ \dfrac{\pi(0)}{c! c^{x-c}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^x, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

(c) Sur le long terme, quelle est la probabilité que le serveur soit oisif, c'est à dire qu'il n'y ait aucun paquet de données à traiter?

Solution: Il s'agit de la probabilité $\pi(0)$

(d) Sur le long terme, quelle est le nombre moyen de paquets de données dans le système?
Indication: Le résultat doit être donnée avec une formule fermée, c'est à dire sans série infinie.

Solution: Il faut calculer l'espérance de le loi π. On a

$$\begin{aligned} L &= \sum_{x=1}^{\infty} x\pi(x) \\ &= \sum_{x=1}^{c-1} x \frac{\pi(0)}{x!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x + \sum_{x=c}^{\infty} x \frac{\pi(0)}{c! c^{x-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x \\ &= A + B \end{aligned}$$

A est une somme finie, on va se concentrer sur B.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{x=c}^{\infty} x \frac{\pi(0)}{c! c^{x-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x \\ &= \frac{\pi(0)}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{x=0}^{\infty} (x + c) \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^x \\ &= \frac{\pi(0)}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left[\frac{c}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} + \frac{\lambda}{\mu c} \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^{-2}\right] \end{aligned}$$

(e) Sur le long terme, quel est le temps moyen d'attente de traitement d'un paquet de données venant d'arriver dans le système?

Solution: On applique la loi de Little, on obtient

$$W = \lambda L.$$

3. Soit un processus de naissance-mort X de paramètres

$$\mu_k = \mu,\ \lambda_{k-1} = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

tel que $X_0 = x_0 \geq 1$.

(a) Quel est l'espace d'état de X_t sachant que $X_0 = x_0 \geq 1$?

Solution: L'espace d'état est

$$E = \{0, \ldots, x_0\}.$$

(b) Quel est la loi de $X_t | X_0 = 1$?

Solution: Il n'y a qu'un seul individu dans la population de départ, cet individu disparaît au bout d'un temps $T_1 \sim \mathsf{Exp}(\mu)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X_t = 1 | X_0 = 1) = \mathbb{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\mu t}$$

La loi de $X_t | X_0 = 1$ est une loi de Bernouilli de paramètre $\mathrm{e}^{-\mu t}$.

(c) Quel est la loi de $X_t | X_0 = x_0$?

Solution: On a $X_t | X_0 = x_0 \sim \mathsf{Bin}(x_0, \mathrm{e}^{-\mu t})$. En effet, il y a x_0 individu dans la population initiale qui vont disparaître au bout de temps exponentiels i.i.d. $T_1, \ldots, T_{x_0}$ de loi $\mathsf{Exp}(\mu)$. On peut considérer que

$$(X_t | X_0 = x_0) \stackrel{D}{=} \sum_{k=1}^{x_0} Y_t^k,$$

où les Y_t^k sont i.i.d. et distribués comme $(X_t | X_0 = 1)$

4. Soit un processus de naissance-mort X de paramètres

$$\mu_k = 0,\ \lambda_{k-1} = (k-1)\lambda \text{ pour } k \geq 1.$$

tel que $X_0 = x_0 \geq 1$.

(a) Montrer par récurrence sur n que

$$\mathbb{P}(X_t = n | X_0 = 1) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Solution: On note $\phi_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n | X_0 = 1)$. Supposons que $n = 1$, on a

$$\phi_1'(t) = -\lambda \phi_1(t)$$

Comme $\phi_1(0) = 1$, alors $\phi_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. La propriété est vérifiée au rang 1. Supposons la propriété vérifiée au rang n, qu'en est-il au rang $n+1$? On a

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}'(t) &= -\lambda(n+1)\phi_{n+1}(t) + \lambda n \phi_n(t) \\ &= -\lambda(n+1)\phi_{n+1}(t) + \lambda n \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

On résout l'équation homogène avec

$$\phi_{n+1}^h(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)t},$$

où C est une constante. On applique la technique de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière. On propose une solution de la forme

$$\phi_{n+1}^p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)t}$$

Il vient après insertion dans l'équation différentielle

$$C'(t) = \lambda n(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1)^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

On en déduit que

$$C(t) = (\mathrm{e}^{\lambda t} - 1)^{n-1} + D.$$

On prend $D = 0$. Les solutions de l'équation différentielle (5) sont de la forme

$$\phi_{n+1}(t) = \left[\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right) + C\right]\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)t}.$$

Avec $\phi_{n+1}(0) = 0$, on conclut que

$$\phi_{n+1}(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

et que la propriété est vérifiée au rang n.

(b) Quel est la loi de $X_t|X_0 = x_0$?

Solution: On a

$$\mathbb{P}(X_t = n|X_0 = x_0) = \binom{n-1}{n-x_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-x_0}(\mathrm{e}^{-\lambda t})^{x_0}$$

C'est une loi binomial négative car somme de v.a. géométrique.