# TD 4: MOUVEMENT BROWNIEN

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On note $\phi$ la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite. Calculer (en fonction de $\phi$ si besoin)

   (a) $\mathbb{P}(B_2 \leq 1)$

   **Solution:** $\phi(1/\sqrt{2})$

   (b) $\mathbb{E}(B_4|B1 = x)$

   **Solution:** $x$

   (c) $\text{Corr}(B_{t+s}, B_s)$ pour $s, t > 0$.

   **Solution:** $s/\sqrt{(t+s)s}$

   (d) $\mathbb{P}(B_3 \leq 5|B_1 = 2)$

   **Solution:** On a
   $$f_{B_3|B_1}(x|y) = f_{B_3,B_1}(x,y)/f_{B_1}(y) = f_{B_3-B_1}(x-y).$$
   On en déduit que
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_3 \leq 5|B_1 = 2) &= \mathbb{P}(B_3 - B_1 \leq 3)\\ &= \mathbb{P}((B_3 - B_1)/\sqrt{2} \leq 3/\sqrt{2})\\ &= \phi(3/\sqrt{2})\end{aligned}$$

2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Soit le processus défini par
   $$X_t = B_t - t \cdot B_1, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1.$$

   (a) Montrer que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien et donner sa fonction de moyenne et de covariance.

   **Solution:** Pour tout $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ et $a_1, \ldots, a_n$, la v.a. $\sum_i a_i X_{t_i}$ est gaussienne. Le processus $X_t$ est donc un processus gaussien. On a
   $$\mathbb{E}(X_t) = 0$$
   et
   $$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(X_t, X_s) &= \mathbb{E}(X_t X_s)\\ &= \mathbb{E}((B_t - tB_1)(B_s - sB_1))\\ &= \mathbb{E}(B_t B_s - sB_t B_1 - tB_1 B_s + stB_1^2)\\ &= s \wedge t - st - st + st\\ &= s \wedge t - st\end{aligned}$$

   (b) Pour quel $t \in [0, 1]$ la variance de $X$ est elle maximale?

**Solution:** La variance de $X$ est donnée par

$$V(t) = \mathsf{Cov}(t,t) = t - t^2$$

On résout

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t^* = 1/2.$$

On vérifie que $V''(t) = -2 < 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.

3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$ son maximum courant.

   (a) Montrer que

   $$\mathbb{P}(S_t \leq x, B_t \leq y) = \phi(x/\sqrt{t}) + \phi((2x-y)/\sqrt{t}) - 1,$$

   pour $x \geq 0$ et $y \leq x$. $\phi$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite.

   **Solution:**

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(S_t \leq x, B_t \leq y) &= \mathbb{P}(S_t \leq x | B_t \leq y)\mathbb{P}(B_t \leq y) \\
   &= [1 - \mathbb{P}(S_t > x | B_t \leq y)]\mathbb{P}(B_t \leq y) \\
   &= [1 - \mathbb{P}(S_t > x, B_t \leq y)/\mathbb{P}(B_t \leq y)]\mathbb{P}(B_t \leq y) \\
   &= \mathbb{P}(B_t \leq y) - \mathbb{P}(B_t \geq 2x - y) \\
   &= \mathbb{P}(B_t/\sqrt{t} \leq y/\sqrt{t}) - \mathbb{P}(B_t/\sqrt{t} \geq (2x-y)/\sqrt{t}) \\
   &= \phi(y/\sqrt{t}) + \phi((2x-y)/\sqrt{t}) - 1
   \end{aligned}$$

   (b) En déduire que la densité jointe du couple $(S_t, B_t)$ s'écrit

   $$f_{(S_t,B_t)}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(2x-y)\exp\left(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\right)$$

   **Solution:** L'expression précédente est la fonction de répartition, on dérive donc par rapport à chacune des variables pour obtenir la densité jointe.

4. Dans sa thèse théorie de la spéculation Louis Bachelier [1] a modélisé le prix des actions par le mouvement brownien arithmétique défini par

   $$X_t = X_0(1 + \mu t + \sigma B_t),\ t \geq 0,$$

   avec $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Un *call* est une option d'achat à un prix $K$ (*strike*) à l'horizon $T$ (*maturity*). Le valeur attendue du flux de trésorerie sortant pour le vendeur est donnée par

   $$\mathbb{E}[(X_T - K)_+] = \mathbb{E}[\max(X_T - K, 0)].$$

   En supposant que $\mu = 0$, donner l'expression de l'espérance du *pay-off* du *call* en fonction de $K$, $T$, $\sigma$, $\phi$ et $\phi'$, où $\phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

   **Solution:**

   $$X_0\sigma\sqrt{T}\phi'\left(\frac{X_0 - K}{X_0\sigma\sqrt{T}}\right) + (X_0 - K)\sqrt{T}\phi\left(\frac{X_0 - K}{X_0\sigma\sqrt{T}}\right)$$

5. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$. Soit

   $$\tau_a = \inf\{t \geq 0 \ ; \ B_t = a\},$$

Appliquer le théorème du temps d'arrêt optionnel à une martingale bien choisie pour montrer que

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}\cdot a}, \text{ pour } \lambda > 0.$$

**Solution:** La martingale en question est la martingale de Wald

$$M_t = \exp(\theta B_t - t\theta^2/2)$$

Soit $\theta = \sqrt{2\cdot\lambda}$, l'application du théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau_a$ donne

$$1 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{\tau_a}) = e^{a\sqrt{2\lambda}}\mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_a})$$

6. Soit le mouvement brownien avec drift

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Soit

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 \; ; \; X_t = a\}$$

(a) Calculer $\mathbb{E}(\tau_a)$ en appliquant le théorème du temps d'arrêt optionnel à une martingale bien choisie.

**Solution:** On note que

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 \; ; \; B_t = (a - \mu t)/\sigma\}$$

On applique le théorème sur $B_t$ au temps $\tau_a$ pour obtenir

$$\mathbb{E}(\tau_a) = a/\mu.$$

(b) Calculer $\mathbb{V}(\tau_a)$ en appliquant le théorème du temps d'arrêt optionnel à une martingale bien choisie.

**Solution:** On applique le théorème du temps d'arrêt à la martingale

$$B_t^2 - t.$$

On trouve

$$\mathbb{V}(\tau_a) = a\sigma^2/\mu^3.$$

# References

[1] Louis Bachelier. *Théorie de la spéculation.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure, 1900.