TD 5: INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. Montrer que pour f fonction déterministe, de carré intégrable,

$$\mathbb{E}\left(B_t\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s\right) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_t\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s + B_t\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}B_s\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathrm{d}B_s\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s\right) + \mathbb{E}(B_t)\mathbb{E}\left(\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}B_s\right)\\
&= \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + 0
\end{aligned}$$

2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus dont la dynamique est donnée par

$$\mathrm{d}X_t = (1-2X_t)\mathrm{d}t + 3\mathrm{d}B_t.$$

(a) Utiliser la formule d'Ito pour trouver $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{rt}X_t)$

Solution: On applique la formule d'Ito sur la fonction $f(t,X_t) = \mathrm{e}^{rt}X_t$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}f = r\mathrm{e}^{rt}X_t\ ;\ \frac{\partial}{\partial x}f = \mathrm{e}^{rt}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{e}^{rt}X_t) &= \left[r\mathrm{e}^{rt}X_t + \mathrm{e}^{rt}(1-2X_t) + \frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot 0\right]\mathrm{d}t + 3\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}(\mathrm{e}^{rt}X_t)\\
&= \left[r\mathrm{e}^{rt}X_t + \mathrm{e}^{rt}(1-2X_t)\right]\mathrm{d}t + 3\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}B_t
\end{aligned}$$

(b) Choisissez r de façon à simplfier l'expression l'expression du drift (devant $\mathrm{d}t$). Calculer la moyenne puis la moyenne asymptotique ($t\to\infty$) du processus.

Solution: On choisit $r=2$, pour obtenir

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2t}X_t) = \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t + 3\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}B_t.$$

En intégrant entre 0 et t, il vient

$$\mathrm{e}^{2t}X_t - X_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1) + 3\int_0^t \mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}B_s.$$

on en déduit que

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)e^{-2t} + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t}) \to 1/2$$

3. Soit un processus X de dynamique

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t, \text{ avec } X_0 = x_0.$$

Montrer que le processus $X_t = (B_t + x_0)^2$ est une solution.

Solution: On applique la formule d'Ito sur la fonction $f(t, B_t) = (B_t + x_0)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} f = 0 \ ; \ \frac{\partial}{\partial x} f = 2(B_t + x_0) \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

On en déduit que

$$\mathrm{d}X_t = \left[0 + 0 \cdot 2(B_t + x_0) + \frac{1}{2} \cdot 2\right] \mathrm{d}t + 2(B_t + x_0)\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}t + +2\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t.$$

4. Soit le processus X de dynamique

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \dfrac{X_t}{t-1}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, & 0 \leq t < 1, \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que

$$X_t = (1 - t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{1 - s}$$

Solution: On applique la formule d'Ito à $f(t, X_t) = X_t/(1 - t)$ pour obtenir

$$\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{1 - t}\right) = \frac{\mathrm{d}B_t}{1 - t}.$$

Le résultat est obtenue par intégration entre 0 et t.

(b) Montrer que X est un processus gaussien. Calculer sa fonction espérance et covariance

Solution: X est une intégrale de Wiener, il s'agit bien d'un processus gaussien de fonction de moyenne identiquement nulle et de fonction de covariance donner par

$$\begin{aligned} C(s, t) &= s \wedge t \frac{(1 - t)(1 - s)}{1 - s \wedge t} \\ &= \begin{cases} s(1 - t), & \text{si } s < t \\ t(1 - s), & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Notre ami le pont brownien fait son come back.

(c) Montrer que $\lim\limits_{t\to 1} X_t = 0$ dans $\mathcal{L}^2$

Solution: On a
$$\mathbb{V}(X_t) = t(1-t) \to 0 \text{ lorsque } t \to 1.$$

5. Soit X un processus de dynamique
$$\mathrm{d}X_t = X_t \mu \mathrm{d}t + X_t \sigma \mathrm{d}B_t$$

(a) Calculer
$$\mathbb{E}\left[(X_T - K)_+\right]$$
Il s'agit du *pay-off* espéré d'un call européen de maturité $T > 0$ et de prix d'exercice $K > 0$ dérivé l'actif X. Donner la réponse en fonction de $X_0, K, T, \mu, \sigma, \phi$ (dfr de la loi normale centrée-réduite) et
$$d_1 = \left[\ln(K/X_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right] \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Solution: On obtient après application de la formule d'Ito sur $f(t, X_t) = \ln(X_t)$
$$X_t = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma B_t\right],\ t \geq 0.$$
Le flux espéré du call est donnée par
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_T - K)_+] &= \mathbb{E}(X_T \mathbb{I}_{X_T > K}) - K\mathbb{P}(X_T > K) \\
&= \mathbb{E}\left(X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] \mathbb{I}_{X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] > K}\right) \\
&- K\mathbb{P}\left(X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] > K\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] \mathbb{I}_{X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] > K}\right) \\
&- K\mathbb{P}\left(X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_T\right] > K\right) \\
&= X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right] \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\sigma B_T} \mathbb{I}_{\sigma B_T > \sigma\sqrt{T} d_1}\right) \\
&- K\left[1 - \phi(d_1)\right]
\end{aligned}$$
où $d_1 = \left[\ln(K/X_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right] \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}$ On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\sigma B_T} \mathbb{I}_{\sigma B_T > \sigma\sqrt{T} d_1}\right) &= \int_{\sigma\sqrt{T} d_1}^{\infty} \mathrm{e}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{T}\sigma} \mathrm{e}^{-x^2/2T\sigma^2} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2} \int_{\sigma\sqrt{T} d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{T}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2} \int_{d_1 - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2} \left(1 - \phi(d_1 - \sigma\sqrt{T})\right).
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathbb{E}[(X_T - K)_+] = X_0 e^{\mu T} \left[1 - \phi(d_1 - \sigma\sqrt{T})\right] - K\left[1 - \phi(d_1)\right]$$

(b) Montrer que $Y_t = e^{-\mu t} X_t,\ t \geq 0$ est une martingale.

Solution: On applique la formule d'Ito sur $Y_t = e^{-\mu t} X_t = f(t, X_t)$. Il vient

$$dY_t = \sigma Y_t dB_t.$$

On en déduit que

$$Y_t = Y_0 e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

qui est une martingale.