

Calcul Stochastique appliqué
M1 DUAS - Université de Strasbourg

Pierre-O Goffard

updated on January 6, 2025

Contents

1	Marche aléatoire et Martingale à temps discret	4
1.1	Le problème de ruine du parieur	4
1.1.1	La marche aléatoire sur \mathbb{Z}	4
1.1.2	Filtration, chaîne de Markov et temps d'arrêt	5
1.1.3	Loi invariante, récurrence et loi stationnaire	11
1.2	Une marche aléatoire plus générale et le modèle de ruine à temps discret	15
1.2.1	Définition	15
1.2.2	Martingale à temps discret	15
1.2.3	Probabilité de ruine dans le modèle de risque à temps discret	18
1.3	Introduction aux mathématiques financières	20
1.3.1	Le modèle binomial	20
1.3.2	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein	23
1.4	Annexes: Approximation normal dans le modèle de Cox-Rubinstein-Ross	25
1.5	Annexes: Blockchain, cryptomonnaie et double dépense	26
1.6	Annexes: Convergence des Martingales	28
2	Processus et martingale en temps continu	33
2.1	Le modèle de ruine de Cramer-Lundberg	33
2.2	Généralités sur les processus en temps continu	35
2.2.1	Définitions	35
2.2.2	Propriétés fonctionnelles	36
2.3	Temps d'arrêt	36
2.4	Martingale	37
2.5	Processus de Lévy	38
2.5.1	Définitions	38
2.5.2	Application à l'étude du processus de Cramer-Lundberg	40
2.6	Annexe: Convergence des martingales en temps continu	42
3	Chaîne de Markov en temps continu	44
3.1	Définition	44
3.2	Propriétés	45

3.3	Le générateur infinitésimal	47
3.4	Comportement asymptotique	52
3.5	Processus de naissance-mort	54
3.6	Théorie des files d'attente et loi de Little	55
3.7	Chaine de Markov subordonnée à un processus de Poisson	57
3.8	Loi <i>phase-type</i>	58
4	Mouvement brownien	63
4.1	Un peu d'histoire	63
4.2	Définition	65
4.2.1	Le principe d'invariance et le lien avec la marche aléatoire sur \mathbb{Z}	65
4.2.2	Le mouvement Brownien en tant que processus gaussien	66
4.3	Propriétés	69
4.3.1	Transformation du mouvement brownien	69
4.3.2	Propriétés de Markov	70
4.3.3	Propriété de Martingale	72
4.4	Variante du mouvement Brownien et application	74
4.4.1	Le mouvement brownien avec dérive	74
4.4.2	Le mouvement brownien géométrique	74
4.4.3	Le pont brownien	74
5	Intégrale stochastique	77
5.1	l'intégrale de Wiener	77
5.1.1	L'espace $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$	77
5.1.2	Intégrale d'une fonction en escalier	78
5.1.3	Cas général	79
5.1.4	L'intégrale de Wiener vue comme un processus gaussien	80
5.2	L'intégrale d'Ito	81
5.2.1	Cas des processus étagés	82
5.2.2	Cas général	82
5.3	Equation différentielle stochastique	85
5.3.1	Processus d'Ito et lemme d'Ito	85
5.3.2	Schéma d'Euler-Maruyama	88
5.4	Changement de probabilité et théorème de Girsanov	88
5.4.1	Changement de probabilité	88
5.4.2	Theorème de Girsanov	89
5.5	Application aux maths-fi: Le modèle de Black-Scholes-(Merton)	90
5.5.1	Le Set up	90
5.5.2	La formule de Black-Scholes	91
5.5.3	Interprétation via la probabilité risque-neutre	93

5.6 Annexe: Espace Gaussien 94

Chapter 1

Marche aléatoire et Martingale à temps discret

Ce cours propose une introduction au calcul stochastique avec pour application principale la modélisation des marchés financiers et la gestion des risque en assurance. L'objet d'étude principale sont les processus stochastiques.

Definition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une suite $(X_t)_{t \geq 0}$ de variable aléatoires (v.a.) sur Ω est un processus stochastique.

- Si $n \in \mathbb{N}$ alors $(X_n)_{n \geq 0}$ est un processus stochastique à temps discret. Par exemple une chaine de Markov.
- si $t \in \mathbb{R}_+$ alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique à temps continu. Par exemple le processus de Poisson.

1.1 Le problème de ruine du parieur

Un joueur entre dans un casino pour jouer à la roulette. Nous supposons que notre parieur dispose de $x \in \mathbb{N}$ jetons. Pour faire une partie, le joueur mise 1 jetons. Il gagne 1 jetons (et récupère sa mise) avec une probabilité $p \in (0, 1)$ et perd sa mise avec probabilité $q = 1 - p$.

1.1.1 La marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le nombre de jetons de notre parieur après n parties. On a $Z_0 = z \geq 0$. A chaque instant $k \in \mathbb{N}$ une partie est jouée,

- la partie est gagnée avec probabilité $p \in (0, 1)$ et la réserve de jeton augment de 1
- la partie est perdue avec probabilité $q = 1 - p$ et la réserve diminue de 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit une suite $(\xi_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. de variables aléatoires (v.a.) de loi

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p.$$

On en déduit que

$$Z_n = z + \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Le processus Z_n est un processus à temps discret et à valeur dans \mathbb{Z} appelé marche ou promenade aléatoire. Le parieur décide de s'arrêter de jouer si sa réserve de jetons atteint le niveau a ou s'il est à cours de jeton. On définit les instants aléatoires

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; Z_n = 0\}, \text{ et } \tau_a = \inf\{n \geq 0 ; Z_n = a\}. \quad (1.1)$$

Nous souhaitons calculer la probabilité que le parieur rentre chez lui ruiné, c'est à dire

$$\phi(z, a) = \mathbb{P}(\tau_0 < \tau_a | Z_0 = z). \quad (1.2)$$

Une visualisation du problème de première excursion est donné sur la [Figure 1.1](#).

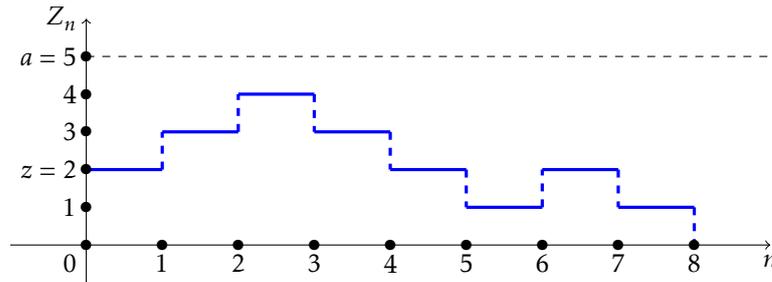


Figure 1.1: Illustration du problème de premier passage sous-jacent à la double dépense.

Le processus Z est une chaîne de Markov.

1.1.2 Filtration, chaîne de Markov et temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel on définit un processus $X := (X_n)_{n \geq 0}$.

Definition 2. Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est une suite de sous-tribu de \mathcal{F} , croissante pour l'inclusion au sens où

$$\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n, \text{ pour } k \leq n.$$

\mathcal{F}_n correspond à l'information disponible au temps n . C'est aussi l'information nécessaire pour tracer la trajectoire du processus jusqu'à l'instant n .

Definition 3. Le processus X est \mathcal{F}_n -adapté si X_n est mesurable par rapport \mathcal{F}_n . La suite

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \text{ } n \in \mathbb{N},$$

est la filtration naturelle du processus X .

Exemple 1. La marche aléatoire Z_n est adaptée à la filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k, k \leq n).$$

Soit un processus $X := (X_n)_{n \geq 0}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ à valeur dans l'espace d'état E .

Definition 4. Le processus X sur un espace d'état E vérifie la propriété de Markov simple si pour toute fonction mesurable $g : E \mapsto \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[g(X_{n+1})|X_n].$$

Exemple 2. Un processus X sur un espace d'état E est une chaîne de Markov s'il vérifie la propriété suivante

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}), \text{ pour tout } (x_0, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+2}.$$

Les chaînes de Markov vérifie la propriété de Markov simple, en prenant $g = \mathbb{I}_y(\cdot)$ pour $y \in E$. Le processus X est une chaîne de Markov homogène (CMH) si

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = x | X_0 = x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } (x, y) \in E^2.$$

Une CMH est caractérisée par son espace d'état, sa loi initiale

$$\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x),$$

et ses probabilités de transitions notées

$$p(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x), \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } (x, y) \in E^2.$$

Lorsque l'espace d'état E est fini, la loi initiale et les probabilités de transition forment respectivement un vecteur et une matrice indicés sur E avec

$$\mu = (\mu(x))_{x \in E}, \text{ et } P = (p(x, y))_{(x, y) \in E}.$$

Proposition 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de loi initiale μ et de matrice de transition P . On a

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n).$$

En particulier, on a (sous réserve que $\mathbb{P}(X_0 = x_0) > 0$),

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) = P^n(x_0, x_n),$$

où $P^n(x_0, x_n)$ est le terme générale de la matrice P^n , et

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = \mu P^n(\cdot, x_n),$$

où μ est un vecteur ligne donnant les probabilités de la loi initiale et $P^n(\cdot, x_n)$ est le vecteur colonne de la matrice P^n donnant les probabilité de transition vers l'état x_n .

Proof. On conditionne en cascade avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&\times \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&\times \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&= p(x_{n-1}, x_n) \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\
&\vdots \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0) p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n) \\
&= \mu(x_0) p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, on conditionne par rapport à tout les chemins possibles menant de x_0 à x_n en n étapes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}} p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n) \\
&= P^n(x_0, x_n).
\end{aligned}$$

Pour la dernière assertion, on conditionne par rapport aux valeurs possibles de l'état initial

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x_n) &= \sum_{x_0 \in E} \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0) \\
&= \sum_{x_0 \in E} \mu(x_0) P^n(x_0, x_n) \\
&= \mu P^n(\cdot, x_n)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. et indépendante de la v.a. X_0 à valeur dans G . Le processus

$$X_n = F(X_{n-1}, \xi_n), \quad n \geq 1,$$

pour toute fonction mesurable $F : E \times G \mapsto E$ est une CMH.

Proof. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$. Posons $A_n = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | A_n) &= \mathbb{P}(F(X_n, \xi_{n+1}) = x_{n+1} | A_n) \\
&= \mathbb{P}(F(x_n, \xi_{n+1}) = x_{n+1} | A_n) \\
&= \mathbb{P}(F(x_n, \xi_{n+1}) = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(F(x_n, \xi) = x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$p(x, y) = \mathbb{P}(F(x, \xi) = y), \forall (x, y) \in E^2.$$

□

Exemple 3. On observe que la marche aléatoire Z vérifie

$$Z_n = Z_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1.$$

Il s'agit bien d'une CMH dont les probabilités de transitions sont données par

$$p(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1, \\ 1 - p & \text{si } y = x - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Definition 5. Une variable aléatoire $\tau : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{N}}_+ = \mathbb{N}_+ \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt pour le processus X et sa filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ si

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Exemple 4. Le temps de ruine $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; Z_n = 0\}$ est un temps d'arrêt du processus Z . En effet, on peut écrire

$$\{\tau_0 = n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{Z_k \neq 0\} \cap \{Z_n = 0\}.$$

Definition 6. Un processus X vérifie la propriété de Markov forte si pour τ un temps d'arrêt et $g : E \mapsto \mathbb{R}$ mesurable, on a

$$\mathbb{E}[g(X_{\tau+n}) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[g(X_{\tau+n}) | X_\tau].$$

Une CMH X vérifie la propriété de Markov forte. En fait, pour temps d'arrêt fini presque sûrement, la chaîne de Markov $\tilde{X} = (X_{n+\tau})_{n \geq 0}$ a les mêmes caractéristiques que X . C'est à dire même espace d'état et probabilités de transition, seule la loi initiale diffère avec

$$\tilde{\mu}(x) = \mathbb{P}(\tilde{X}_0 = x) = \mathbb{P}(X_\tau = x).$$

La propriété de Markov forte permet l'étude de temps tel que τ_0 . L'application de cette propriété au temps $\tau = 1$ (les constantes sont des temps d'arrêt) est l'analyse à un pas qui permet notamment de démontrer le résultat suivant:

Theorem 1.

$$\phi(z, a) = \begin{cases} \frac{(q/p)^z - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a} & \text{if } p \neq q, \\ \frac{a-z}{a} & \text{if } p = q. \end{cases} \quad (1.3)$$

Proof. Par la loi des probabilités totales, on a

$$\phi(z, a) = p\phi(z+1, a) + (1-p)\phi(z-1, a), \quad z \geq 1. \quad (1.4)$$

Nous avons également les conditions limites suivantes

$$\phi(0, a) = 1 \text{ and } \phi(a, a) = 0. \quad (1.5)$$

L'équation (1.4) définit une suite récurrente linéaire d'ordre 2¹ associée à l'équation caractéristique

$$px^2 - x + 1 - p = 0. \quad (1.6)$$

1. Supposons que $p = 1 - p = 1/2$ alors (1.6) a une unique solution $r = 1$. Les suites définies par (1.4) sont données par

$$\phi(z, a) = A + Bz.$$

L'utilisation des conditions limites (1.5) conduit à

$$\phi(z, a) = \frac{a - z}{a},$$

comme annoncé.

2. Supposons que $p \neq q = 1 - p$ alors (1.6) a deux solutions réelles

$$r_1 = 1, \text{ and } r_2 = \frac{1 - p}{p}.$$

Les suites définies par (1.4) sont de la forme

$$\phi(z, a) = A + B \left(\frac{1 - p}{p} \right)^z,$$

où A et B sont des constantes. Les conditions limites (1.5), implique que

$$\phi(z, a) = \frac{(q/p)^z - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a},$$

comme annoncé.

□

Remark 1. Sur le comportement asymptotique de Z en fonction de la valeur de p . On a par la loi des grands nombres

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{Z_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2p - 1.$$

On en déduit que

$$Z_n \rightarrow \begin{cases} -\infty, & \text{si } p < 1/2, \\ ?(0 \times \infty), & \text{si } p = 1/2, \\ +\infty, & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

Dans le cas $p = 1/2$ le processus oscille. Par le théorème centrale limite, on observe que pour n très grand $Z_n \sim \text{Normal}(z, \sqrt{n})$. Le [Theorem 1](#) avec $a \rightarrow \infty$ nous indique que

$$\phi(z, \infty) = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \leq 1/2, \\ (q/p)^z, & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

¹Pour rappel <https://www.bibmath.net/formulaire/index.php?action=affiche&quoi=suitereclin>.

Dans le cas $p = 1/2$, on montre que l'état 0 est récurrent. Cette notion est abordée en annexe, voir l'annexe 1.6. le résultat (1.7) est prouvé en td et une application à l'étude du problème de la double dépense dans le contexte d'une blockchain est évoqué dans l'annexe 1.5

Il est aussi possible de donner la loi de probabilité de τ_0 via le résultat suivant.

Theorem 2. Si $z = 0$ alors $\tau_0 = 0$ p.s.. Si $z > 0$ alors la loi de τ_0 est donnée par

$$\mathbb{P}_z(\tau_0 = n) = \frac{z}{n} \binom{n}{(n-z)/2} p^{(n-z)/2} (1-p)^{(n+z)/2} \text{ si } n \geq z \text{ et } n-z \text{ est pair,}$$

et 0 sinon.

Proof. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemma 1.

$$\mathbb{P}_z(\tau_0 = n) = \frac{z}{n} \mathbb{P}_z(Z_n = 0). \quad (1.8)$$

Proof. Si $z = 0$ alors $\tau_0 = 0$ p.s. et les deux membres (1.8) sont égaux à 0. Supposons que $z \geq 1$, nous avons $\mathbb{P}_z(\tau_0 = n) = 0$ et $\mathbb{P}_z(Z_n = 0) = 0$ lorsque $n < z$ et $n - z$ est impair. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$, quand $n = 1$ nous avons

$$\mathbb{P}_z(\tau_0 = 1) = 0 = \frac{z}{1} \mathbb{P}_z(Z_1 = 0), \text{ pour } z > 1,$$

et

$$\mathbb{P}_1(\tau_0 = 1) = q = \frac{1}{1} \mathbb{P}_1(Z_1 = 0), \text{ pour } z = 1.$$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée au rang $n > 1$. En vertu de la loi des probabilités totales, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_z(\tau_0 = n+1) &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \mathbb{P}_z(\tau_0 = n+1 | \xi_1 = y) \mathbb{P}(\xi_1 = y) \\ &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \mathbb{P}_{z+y}(\tau_0 = n) \mathbb{P}(\xi_1 = y) \\ &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \frac{z+y}{n} \mathbb{P}_{z+y}(Z_n = 0) \mathbb{P}(\xi_1 = y) \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, nous avons eu recours à la propriété de Markov forte. Nous "détricotons" la loi des probabilités totales pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_z(\tau_0 = n+1) &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \frac{z+y}{n} \mathbb{P}_{z+y}(Z_n = 0) \mathbb{P}(\xi_1 = y) \\ &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \frac{z+y}{n} \mathbb{P}_z(Z_{n+1} = 0 | \xi_1 = y) \mathbb{P}(\xi_1 = y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{y \in \{-1,1\}} \frac{z+y}{n} \mathbb{P}_z(\xi_1 = y | Z_{n+1} = 0) \mathbb{P}_z(Z_{n+1} = 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}_z(Z_{n+1} = 0)}{n} [z + \mathbb{E}_z(\xi_1 | Z_{n+1} = 0)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le passage à (1.9) s'explique par l'égalité suivante:

$$[Z_n | Z_0 = z + y] = [Z_{n+1} | Z_0 = z, \xi_1 = y] \mathbb{P} - \text{ p.s..}$$

Comme les ξ_i sont i.i.d. alors il vient

$$\mathbb{E}_z(\xi_1 | Z_{n+1} = 0) = \mathbb{E}_z(\xi_i | Z_{n+1} = 0), \quad i = 1, \dots, n+1,$$

et par suite

$$\mathbb{E}_z(\xi_1 | Z_{n+1} = 0) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}_z(\xi_i | Z_{n+1} = 0) = \frac{-z}{n+1}.$$

En injectant l'expression ci-dessus dans (1.10), il vient

$$\mathbb{P}_z(\tau_0 = n+1) = \frac{z}{n+1} \mathbb{P}_z(Z_{n+1} = 0).$$

□

Pour compléter la preuve, on remarque simplement que

$$\mathbb{P}_z(Z_n = 0) = \binom{n}{(n-z)/2} p^{(n-z)/2} q^{(n+z)/2}.$$

Il s'agit de la probabilité d'occurrence d'une trajectoire de $(Z_n)_{n \geq 0}$ commençant au niveau $Z_0 = z$ finissant au niveau 0 comprenant $(n-z)/2$ sauts vers le haut et $(n+z)/2$ sauts vers le bas. □

1.1.3 Loi invariante, récurrence et loi stationnaire

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E .

Definition 7 (Irréductibilité). *La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$P^n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0.$$

Example 5. *La marche aléatoire sur \mathbb{Z} est irréductible. En effet, pour $n = |x - y|$, on a*

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \begin{cases} p^{y-x}, & \text{si } y \geq x, \\ q^{x-y}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Definition 8 (Loi invariante). *Soit μ une loi de probabilité sur E . μ est une loi invariante si*

$$\mu(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) p(x, y),$$

soit matriciellement

$$\mu = \mu \mathbf{P}.$$

Definition 9 (Loi réversible). *Soit λ une loi de probabilité sur E . λ est une mesure réversible si*

$$\lambda(x) p(x, y) = \lambda(y) p(y, x), \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Proposition 3.

$$\lambda \text{ réversible} \Rightarrow \lambda \text{ invariante}.$$

Proof. On a

$$\sum_{x \in E} \lambda(x)p(x, y) = \sum_{x \in E} \lambda(y)p(y, x) = \lambda(y)$$

□

Exemple 6 (Modèle d'urne d'Erhenfest). Dans deux urnes A et B se trouvent N boules numérotées de 1 à N . Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond au nombre de boules présente dans l'urne A . On suppose qu'initialement toutes les boules sont dans l'urne A (soit $X_0 = N$). A chaque pas de temps

1. On tire un numéro i au hasard dans $\{1, \dots, n\}$
2. La boule portant le numéro i change d'urne

Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une CMH d'espace d'état $E = \{0, \dots, N\}$ de probabilité de transition

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{N-x}{N}, & \text{si } y = x + 1, \text{ et } x = 0, \dots, N - 1, \\ \frac{x}{N}, & \text{si } y = x - 1, \text{ et } x = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une loi λ est réversible si et seulement si elle vérifie

$$\lambda(x) \frac{N-x}{N} = \lambda(x+1) \frac{x+1}{N}, \quad x = 0, \dots, N-1 \text{ et } \sum_{x \in E} \lambda(x) = 1.$$

On remarque alors que $\lambda(x) = \binom{N}{x} 2^{-N}$ convient.

Soit $x \in E$, on notera la probabilité et l'espérance conditionnelle de X_n sachant $X_0 = x$ de la façon suivante

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y), \quad y \in E, \text{ et } \mathbb{E}(X_n | X_0 = x) = \mathbb{E}_x(X_n).$$

Soit $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une CMH sur E . On note

$$R_x = \inf\{n \geq 1 ; X_n = x\}$$

le temps de retour à l'état x (en supposant que $X_0 = x$).

Definition 10 (Etat récurrent/transitoire). Un état $x \in E$ est

1. récurrent si

$$\mathbb{P}_x(R_x < \infty) = 1,$$

- récurrent positif si $\mathbb{E}_x(R_x) < \infty$
- récurrent nul si $\mathbb{E}_x(R_x) = \infty$

2. est transitoire

$$\mathbb{P}_x(R_x = \infty) > 0$$

Un état est transitoire lorsqu'il n'est pas récurrent.

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une CMH irréductible alors les états sont tous soit récurrents soit transitoires.

Theorem 3. *La marche aléatoire sur \mathbb{Z} est irréductible et*

- *Récurrente si $p = 1/2$.*
- *transitoire sinon.*

Proof. Pour montrer ce résultat, on étudie la distribution du temps R_0 de retour à 0. On a

$$\mathbb{P}_0(R_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_0(R_0 = n).$$

On remarque que les trajectoires allant de 0 à 0 sont nécessairement de longueur paire et

$$\mathbb{P}_0(R_0 = 2n + 1) = 0, \text{ pour } n = 0, 1, \dots$$

et

$$\mathbb{P}_0(R_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_0(R_0 = 2n).$$

On a exactement $\binom{2n}{n}$ trajectoires possibles, celle qui nous intéresse (pour lesquels $R_0 = 2n$) sont celles qui ne repassent pas par 0 entre l'instant 0 et $2n$ (On parle d'excursions). Leur nombre est donné par

$$2 \times C_{n-1} = 2 \times \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad (1.11)$$

Definition 11 (Nombre de Catalan). *Les nombres de Catalan sont définis par*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \text{ pour } n \geq 0,$$

et vérifie

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \text{ pour } n \geq 1 \quad (1.12)$$

Example 7 (Mots de Dyck). C_n correspond aux nombre de mots de $2n$ lettres comprenant respectivement n A et n B, tels que lu de gauche à droite le nombre de A demeure supérieur ou égal au nombre de B. La relation de récurrence (1.12) s'explique par le fait qu'un mot de Dyck contenant plus de deux lettres est obtenu par la concaténation de deux mots de Dyck.

Dans le problème considéré, on s'intéresse aux nombres de mots tels que le nombre de A (interprétés comme des +1) soit strictement supérieur au nombre de B (interprétés comme des -1). Alors notre mot commence nécessairement par un A et fini sur un B. La portion entre ce A et ce B est un mot de Dyck contenant $2n - 2$ lettres. On a C_{n-1} possibilités. Le facteur 2 dans (1.11) s'explique par la symétrie du problème puisque l'on peut considérer les trajectoires dans lesquels les -1 dominent les +1. La probabilité d'une trajectoire quelconque de longueur $2n$ contenant n "+1" et n "-1" est donnée par $p^n(1-p)^n$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(R_0 < \infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_0(R_0 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2C_{n-1}[p(1-p)]^n \\ &= 2p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n[p(1-p)]^n = 2p(1-p)C[p(1-p)], \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$. Or, on a

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} x^n = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \sum_{k=0}^n C_n x^{n+k} = 1 + x C(x)^2 \end{aligned}$$

Par suite, $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$. En substituant dans (1.13), on obtient

$$\mathbb{P}_0(R_0 < \infty) = 1 - |1 - 2p|$$

On en déduit que si $p \neq 1/2$ alors $\mathbb{P}_0(R_0 < \infty) < 1$ et la chaîne est transitoire sinon $\mathbb{P}_0(R_0 < \infty) = 1$ et la chaîne est récurrente. \square

Remark 2. La marche aléatoire Z telle que $p = 1/2$ est récurrente nulle. On rappelle que

$$\mathbb{P}(R_0 = 2n) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 4^{-n}.$$

Par la formule de Stirling, il vient l'équivalent

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(R_0 = 2n) \sim \frac{n^{-3/2}}{\sqrt{2}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}_0(R_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \mathbb{P}(R_0 = 2n) = \infty,$$

donc la marche aléatoire est récurrente nulle.

Definition 12. La période d'un état $x \in E$ est définie par

$$d(x) = \text{pgcd}\{n \geq 1 ; \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x) > 0\}.$$

Si $d(x) = 1$ alors x est apériodique. Si $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ est irréductible alors tous les états ont la même période.

Theorem 4. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible, récurrente positive et apériodique alors la chaîne se stabilise au sens où

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(y), \text{ pour tout } x \in E.$$

La loi π est unique et coïncide avec la loi invariante.

Remark 3. Si l'espace d'état E est fini, et que la chaîne X est irréductible, alors tous les états sont récurrents positifs. Il existe une unique mesure invariante qui est aussi la mesure stationnaire. Je vous invite à vérifier cela en python sur l'exemple de l'urne d'Erhenfest. Voir `ehrenfest.ipynb` sur moodle.

1.2 Une marche aléatoire plus générale et le modèle de ruine à temps discret

On peut généraliser le processus Z étudié précédemment.

1.2.1 Définition

Soit $X := (X_n)_{n \geq 0}$ le processus défini par

$$X_0 = x, \text{ et } X_n = X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (1.14)$$

où $(\xi_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a. i.i.d. sur \mathbb{R} . Le processus X est à temps discret et à valeur dans \mathbb{R} .

Exemple 8. Soit une compagnie d'assurance non-vie,

- *detenant un capital initial $x > 0$,*
- *recupérant $c > 0$ sur chaque période d'exercice au titre des primes,*
- *indemnisant U , variable aléatoire positive, à ses assurés sur chaque période d'exercice.*

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la valeur de la réserve financière à la fin de chaque période d'exercice. On a

$$X_0 = x \text{ et } X_n = x + c \times n - \sum_{k=1}^n U_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

où U_1, U_2, \dots sont des v.a. i.i.d. positives distribuées comme U . On s'intéresse à la probabilité de ruine avant T définie par

$$\psi(x, T) = \mathbb{P}_x(X_n < 0, \text{ pour un certain } n \leq T).$$

- *Calibrer $c \Rightarrow$ tarification, typiquement*

$$c = \mathbb{E}(U)(1 + \eta),$$

avec un chargement de sécurité $\eta > 0$.

- *Calibrer $x \Rightarrow$ provisionnement. Choisir x grand permet d'éviter une ruine à court terme.*

On retombe sur le processus (1.14) en prenant

$$\xi = c - U.$$

Le calcul de la probabilité de ruine s'effectue en utilisant la propriété de Martingale de la marche aléatoire.

1.2.2 Martingale à temps discret

Definition 13. Un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour une filtration \mathcal{F}_n , si

- X_n est \mathcal{F}_n -adapté,

(ii) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ pour $n \geq 0$,

(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

Definition 14. Le processus X est une sur-martingale (resp. sous-martingale) si

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq (\text{resp. } \geq) X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On désignera par le terme S -martingale une sous ou sur martingale

Remark 4. Une sur-martingale décroît en moyenne tandis qu'une sous-martingale croît en moyenne.

On note également que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale alors

$$\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n, \text{ pour tout } 0 \leq n \leq m.$$

En effet, on note que

$$\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_{m-1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{m-1}|\mathcal{F}_n) = \dots, \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

On note également que cela entraîne

$$\mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0).$$

Example 9. 1. Soit X_1, \dots, X_n une suite de v.a. i.i.d. intégrables tels que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour tout $i \geq 1$ alors leur somme

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

définit une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. En effet,

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |X_i|\right) \leq n \cdot \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

et

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = S_n.$$

2. Soit X_1, \dots, X_n une suite de v.a. positives i.i.d. et intégrables telles que $\mathbb{E}(X_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$ alors leur produit

$$M_n = \prod_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1,$$

définit une martingale par rapport à la filtration $\sigma(X_1, \dots, X_n)$. En effet,

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_i|) = \mathbb{E}(|X|)^n < \infty,$$

et

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}M_n|\mathcal{F}_n) = M_n \mathbb{E}(X_{n+1}) = M_n.$$

3. Soit ξ une v.a. tel que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, le processus $M_n = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ qui correspond à la valeur moyenne de la variable aléatoire ξ étant donnée l'information collectée \mathcal{F}_n jusqu'à l'instant $n \geq 1$, définit une martingale. En effet,

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(|\xi|\mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|\xi|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(|\xi|),$$

et

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

Il s'agit d'une propriété de l'espérance conditionnelle. Pour Z \mathcal{F}_n -mesurable et bornée, on a d'une part

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z\xi|\mathcal{F}_{n+1})) = \mathbb{E}(Z\xi)$$

et d'autre part

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n))$$

On en déduit que $\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(Z\xi)$ or $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ est la seule v.a. \mathcal{F}_n mesurable telle que

$$\mathbb{E}(Z\xi) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)).$$

Definition 15. Un processus $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est \mathcal{F}_n -prévisible si

$$H_n \text{ est borné et } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable.}$$

Proposition 4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté et $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus prévisible alors le processus définie par

$$(H \cdot X)_0 = 0, (H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + \dots + H_n(X_n - X_{n-1}), n \geq 1$$

est une martingale (resp. une surmartingale) si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale (resp. sur-martingale).

Proof. Il faut montrer que

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n | \mathcal{F}_n] = 0.$$

On note que

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n] = 0.$$

□

Remark 5. 1. Le processus $H \cdot X$ est aussi appelée intégrale stochastique discrète et on écrit

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) = \int_1^n H_k dX_k.$$

C'est un outil pratique pour les démonstrations.

Theorem 5 (du temps d'arrêt optionnel). Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale (resp. sur-martingale) et τ un \mathcal{F}_n temps d'arrêt. Le processus $(X_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale (resp. une sur-martingale). De plus, si τ est bornée alors

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

Proof. On remarque que le processus définie par

$$H_n = \mathbb{I}_{\tau \geq n} = 1 - \mathbb{I}_{\tau \leq n-1}$$

est prévisible et que

$$(X_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}} = X_0 + (H \cdot X)_n \text{ (on peut le montrer par récurrence)}$$

est donc une martingale (si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale). Comme τ est bornée alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\tau \leq N$ presque sûrement. On en déduit que

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_0).$$

□

Remark 6. *Lorsqu'on ne sait pas si τ est borné ou qu'il n'est tout simplement pas borné. L'astuce consiste à considérer le temps d'arrêt $\tau \wedge n$ puis à faire tendre n vers l'infini. Cela fonctionne lorsque le processus X tend vers 0 asymptotiquement.*

Le résultat précédent s'étend à des temps d'arrêt quelconques sous réserve d'ajouter une hypothèse d'uniforme intégrabilité. On peut aussi démontrer l'existence de limite pour les processus martingales. Ces résultats sont résumés en annexe, voir [Section 1.6](#). Pour un exposé exhaustif sur les martingales en temps discret, le lecteur peut se référer aux notes de cours de [Le Gall \[2006, Chapitre 13\]](#)², à l'ouvrage de [Laleuf \[2014, Chapitre 4\]](#) et pour les anglophones à l'ouvrage de [Williams \[1991\]](#).

1.2.3 Probabilité de ruine dans le modèle de risque à temps discret

La richesse d'une compagnie d'assurance est modélisée par la marche aléatoire X , défini par

$$X_0 = x, X_n = X_{n-1} + \xi_n, n \geq 1,$$

où les ξ sont i.i.d. et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Nous avons besoin de définir la martingale de Wald.

Proposition 5. *Le processus*

$$M_n = \exp(\theta X_n - n\kappa(\theta)), \text{ pour } n \geq 1,$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta \xi}) < \infty$ est une \mathcal{F}_n -martingale.

Proof. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|M_n|) &= \mathbb{E}(M_n) \\ &= e^{\theta x} < \infty \end{aligned}$$

²<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jean-francois.le-gall/IPPA2.pdf>

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}[e^{\theta X_{n+1} - (n+1)\kappa(\theta)}|\mathcal{F}_n] \\
&= e^{-(n+1)\kappa(\theta)}\mathbb{E}[e^{\theta X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\
&= e^{-(n+1)\kappa(\theta)}e^{\theta X_n}\mathbb{E}[e^{\theta \xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\
&= e^{-(n+1)\kappa(\theta)}e^{\theta X_n}\mathbb{E}[e^{\theta \xi_{n+1}}] \\
&= e^{-(n+1)\kappa(\theta)}e^{\theta X_n}e^{\kappa(\theta)} \\
&= M_n
\end{aligned}$$

□

Soit

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; X_n \leq 0\}$$

On souhaite calculer la probabilité de ruine à horizon de temps infini ($T = \infty$) définie par

$$\psi(x) = \psi(x, \infty) = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty).$$

Supposons que $\mathbb{E}(\xi) > 0$ alors nous avons le résultat suivant

Proposition 6. *Supposons qu'il existe $\theta^* > 0$ tel que*

$$\log \mathbb{E}(e^{-\theta^* \xi}) = 0,$$

alors

$$\psi(x) = \psi(x, \infty) = \frac{e^{-\theta^* x}}{\mathbb{E}[e^{\theta^* d(x)}|\tau_0 < \infty]},$$

où $d(x) = -X_{\tau_0}$ est le déficit à la ruine.

Proof. On définit le processus

$$Y_n = x - X_n, \quad n \geq 0.$$

Il s'agit également d'une marche aléatoire qui démarre à 0 et dont les sauts sont distribués comme $-\xi$. Le processus

$$e^{\theta Y_n - n\kappa(\theta)}, \quad n \geq 0,$$

avec $\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{-\theta \xi})$ est une martingale. Au vu de la définition de θ^* , le processus $(e^{\theta^* Y_n})_{n \geq 0}$ est une martingale. Comme $\mathbb{E}(-\xi) < 0$ alors $Y_n \rightarrow -\infty$. On remarque que

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; X_n \leq 0\} = \inf\{n \geq 0 ; Y_n \geq x\}$$

On applique le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps $\tau_0 \wedge n = \min(\tau_0, n)$ pour $n > 0$ au processus $(e^{\theta^* Y_n})_{n \geq 0}$. Il vient

$$1 = \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_0}) = \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_{\tau_0 \wedge n}}) = \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_{\tau_0}} \mathbb{I}_{\tau_0 < n} + e^{\theta^* Y_n} \mathbb{I}_{\tau_0 \geq n})$$

En laissant $n \rightarrow \infty$, il vient

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = \frac{e^{-\theta^* x}}{\mathbb{E}[e^{-\theta^* X_{\tau_0}}|\tau_0 < \infty]}.$$

□

1.3 Introduction aux mathématiques financières

Le contenu de ce chapitre s'inspire des notes de cours de [Tankov and Touzi \[2010\]](#).

1.3.1 Le modèle binomial

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le prix d'un actif financier³ au cours du temps, par exemple

- une action, titre de propriété partiel d'une entreprise (action d'entreprise du CAC40)
- une obligation (bond du trésors américain)
- une commodité (l'or, le pétrole, ...)

L'actif dit risqué a une valeur initiale $S_0 = s$, et sa valeur à $n = 1$ est donnée par une variable aléatoire S_1 définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tel que

$$\Omega = (\omega_u, \omega_d), \quad 0 < \mathbb{P}(\{\omega_u\}) = p < 1, \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_1(\omega_u) = us, \\ S_1(\omega_d) = ds, \end{cases}$$

avec $s, u, d > 0$ et $u > d$. L'évolution de l'actif risqué peut être représenté à l'aide d'un arbre, c.f. [Figure 1.2](#). $(S_n)_{n \geq 0}$ est une CMH sur $E = \{u^i d^j s\}_{i, j \in \mathbb{N}}$. Il y a également sur le marché un actif

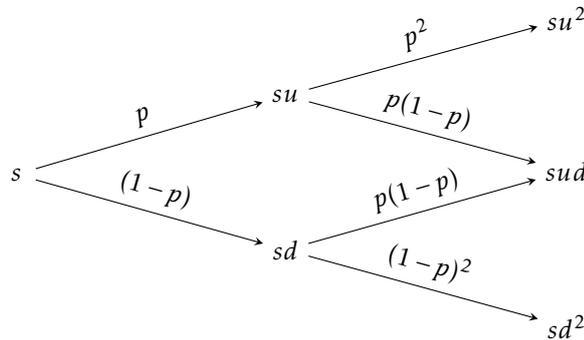


Figure 1.2: Evolution de l'actif risqué

sans risque $(S_n^0)_{n \geq 0}$ tel que $S_0^0 = 1$ et

$$S_1^0(\omega_u) = S_1^0(\omega_d) = R.$$

Il s'agit par exemple d'un livret d'épargne de taux d'intérêt $R > 0$.

Une stratégie (auto-financée) est un couple $(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^2$, avec x le capital initial et θ le nombre de part d'actif risqué détenu sur la période $n \in \{0, 1\}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la valeur du portefeuille au cours du temps. On a

$$X_0 = x = (x - \theta s) + \theta s \quad \text{et} \quad X_1 = (x - \theta s)R + \theta S_1.$$

³https://en.wikipedia.org/wiki/Financial_asset

On compare souvent la valeur actuelle des actifs et stratégie, le taux d'actualisation est donnée par le rendement de l'actif sans risque. On définit ainsi la valeur actuelle de l'actif risqué, de l'actif sans risque et de la stratégie (x, θ) par

$$\tilde{S}_1 = \frac{S_1}{R}, \tilde{S}_1^0 = 1, \text{ et } \tilde{X}_1 = x + \theta(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0).$$

La valorisation financière des actifs repose sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Definition 16. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie $(0, \theta)$ telle que

$$X_1(\omega_i) \geq 0, i \in \{u, d\}, \text{ et } \mathbb{P}(X_1 > 0) > 0.$$

Proposition 7. Dans notre modèle, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique

$$d < R < u.$$

Proof. (i) Supposons que $R \geq u$.

A $n = 0$, L'investisseur emprunte une part d'actif risqué au courtier et le revend immédiatement au prix $S_0 = s$. le montant s est investit dans l'actif sans risque.

A $n = 1$, l'actif risqué est acheté au prix S_1 et rendu au courtier. Un profit positif est réalisé presque sûrement puisque

$$X_1 = \begin{cases} s(R - u), & \text{si } \omega_u, \\ s(R - d), & \text{si } \omega_d. \end{cases}$$

(ii) Supposons que $R \leq d$.

A $n = 0$, L'investisseur emprunte $S_0 = s$ à la banque pour acquérir une part d'actif risqué.

A $n = 1$, l'actif est revendu au prix S_1 le montant sR est remboursé au banquier. Un profit positif est réalisé presque sûrement puisque

$$X_1 = \begin{cases} s(u - R), & \text{si } \omega_u, \\ s(d - R), & \text{si } \omega_d. \end{cases}$$

□

Un produit dérivé est un contrat dont le *pay-off* V dépend de l'actif risqué sous-jacent, les produits dérivés commun sont les options.

Definition 17. Une Option d'achat (resp. de vente) européenne donne le droit (pas l'obligation) d'acheter un titre à la date N au prix K . Le flux de trésorerie (*pay-off*) associé à ce contrat est donnée par

$$(S_N - K)_+ \text{ (resp. } (K - S_N)_+)$$

où $(x)_+ = \max(0, x)$ désigne la partie positive de x .

Prenons par exemple un call européen de maturité 1 et de prix d'exercice K , on a $V = (S_1 - K)_+$. Il est possible de répliquer le *pay-off* V à l'aide d'une stratégie auto-financée. Il s'agit de trouver le couple (x, θ) tel que

$$\begin{cases} V(\omega_u) = \theta us + R(x - \theta s), \\ V(\omega_d) = \theta ds + R(x - \theta s). \end{cases}$$

On en déduit que

$$\theta = \frac{V(\omega_u) - V(\omega_d)}{s(u - d)}$$

et

$$x = \frac{V(\omega_u)}{R} \frac{R - d}{u - d} + \frac{V(\omega_d)}{R} \frac{u - R}{u - d} \quad (1.15)$$

Soit $q = \frac{R-d}{u-d}$, en l'absence d'opportunité d'arbitrage $q \in (0, 1)$. On définit une mesure de probabilité \mathbb{Q} , équivalente à \mathbb{P} , telle que

$$\mathbb{Q}(S_1 = us) = q \text{ et } \mathbb{Q}(S_1 = ds) = 1 - q.$$

Le prix du produit dérivé est donné par son espérance (à la manière d'une prime en assurance). Sous la probabilité \mathbb{Q} , le prix est exactement l'investissement initial du portefeuille répliquant $x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V})$. Sous cette probabilité encore, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_1) = Rs.$$

Cela signifie que, sous la probabilité risque neutre, le rendement moyen de l'actif risqué est le même que celui de l'actif non risqué. Il est possible que sous la probabilité historique $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1) \geq RS_0$ (*higher risk, higher gain* pour inciter les agents à investir dans l'actif risqué!). On remarque aussi que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = s.$$

Le processus $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ est donc une \mathbb{Q} -martingale. La mesure de probabilité \mathbb{Q} est la probabilité risque neutre. Son existence et son unicité sont équivalente à l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Remark 7. *La tarification des produits dérivés doit s'effectuer suivant la probabilité risque neutre sans quoi il existe une opportunité d'arbitrage. Supposons qu'on effectue la tarification avec une autre probabilité \mathbb{Q}'*

- *Supposons que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}) > \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V})$*
 - *A $n = 0$, je vend l'option au prix $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V})$. J'applique la stratégie avec $x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V})$ (c'est à dire acheter θs d'actif risqué et placer $x - \theta s$ à la banque) et je place $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}) - x$ à la banque.*
 - *a $n = 1$ ma stratégie rapport V que je cède à l'acheteur de l'option. Je réalise un profit de $(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}) - x)R$.*
- *Supposons que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}) < \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V})$*
 - *A $n = 0$, J'emprunte $x - \theta s$ à la banque et j'emprunte θ d'actif au courtier. Je revend immédiatement l'actif au prix s . J'ai un capital x qui me permet d'acheter l'option au prix $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V})$ et de placer $x - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V})$ à la banque.*

- A $n = 1$, Mon investissement rapporte $V + (x - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}))R$ Comme $V = (x - \theta s)R + \theta S_1$ alors je peux rembourser mon emprunt à la banque, acheter l'actif risqué au prix S_1 et le redonner au courtier. Je dégage un profit égale $(x - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(\tilde{V}))R$.

L'équilibre sur le marché des produits dérivés suppose que la tarification a été effectuée sous la mesure de probabilité risque neutre, le taux d'actualisation à utiliser R doit permettre de vérifier la propriété "martingale" de la valeurs des actifs sous jacents. Ici on suppose que ce taux sans-risque R est calibré sur la base des prix correspondant à un équilibre offre et demande ayant gommer les opportunités d'arbitrage.

1.3.2 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Soit $T > 0$ un horizon de temps et $i \frac{T}{N}, i = 0, \dots, N$ une subdivision de $[0, T]$. Soit $(S_n)_{n \leq N}$ la valeur de l'actif sous jacent dont la dynamique est donnée par

$$S_n = S_0 \exp(n\mu_N + Z_n\sigma_N), n = 0, \dots, N.$$

où $\mu_N = \mu \frac{T}{N}$, $\sigma_N = \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}$, et $Z_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, avec des ξ_i i.i.d. suivant la loi

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1 - p,$$

et $Z_0 = 0$

Remark 8. Le processus S est aussi une chaîne de Markov, on peut écrire

$$S_n = S_{n-1} \exp(\mu_N + \xi_n\sigma_N), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ce modèle est équivalent au modèle binomial avec

$$u = e^{\mu_N + \sigma_N} \text{ et } d = e^{\mu_N - \sigma_N}.$$

Le rendement des actifs est souvent défini par S_n/S_{n-1} , μ_N est le drift et σ_N la volatilité. Le rendement de l'actif sans risque sur une période de temps de longueur T/N est donné par $R_N = e^{r \frac{T}{N}}$. La [Figure 1.3](#) montre des trajectoires de l'actif risqué et de l'actif sans risque.

Par analogie avec le modèle binomial, sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , le processus $\tilde{S}_n = S_n/R_N^n$, $n \geq 0$ doit être une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma_N(\xi_i, i \leq n)$. Le processus \tilde{S} est une martingale sous \mathbb{Q} si

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n.$$

On observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_n}{R_N^{n+1}} e^{\mu_N + \xi_{n+1}\sigma_N} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \frac{S_n}{R_N^{n+1}} e^{\mu_N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\xi_{n+1}\sigma_N} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \tilde{S}_n \frac{e^{\mu_N}}{R_N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\xi_{n+1}\sigma_N} \right] \\ &= \tilde{S}_n \frac{qe^{\mu_N + \sigma_N} + (1-q)e^{\mu_N - \sigma_N}}{R_N} \end{aligned}$$

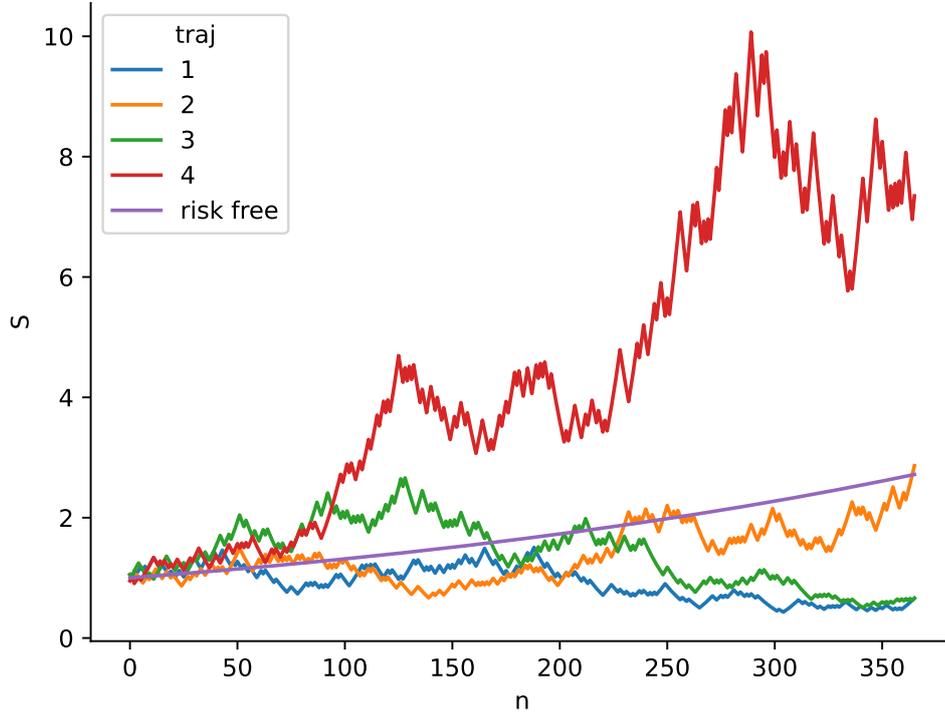


Figure 1.3: Trajectoires du processus S et de l'actif sans risque

Pour que S soit une martingale, il faut que

$$qe^{\mu_N + \sigma_N} + (1 - q)e^{\mu_N - \sigma_N} = R_N \Leftrightarrow q = \frac{R_N - e^{\mu_N - \sigma_N}}{e^{\mu_N + \sigma_N} - e^{\mu_N - \sigma_N}}.$$

On a bien identifié la probabilité risque neutre \mathbb{Q} telle que

$$\mathbb{Q}(\xi = 1) = \frac{R_N - e^{\mu_N - \sigma_N}}{e^{\mu_N + \sigma_N} - e^{\mu_N - \sigma_N}} = \frac{R_N - d}{u - d} = q$$

de manière analogue au modèle binomial. La valorisation d'un produit dérivé de *pay-off* $g(S_N)$ se fait sous la probabilité risque neutre avec

$$\pi = R_N^{-N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(S_N)].$$

Cette espérance se calcule bien en remarquant que

$$\mathbb{Q}(S_N = S_0 u^k d^{N-k}) = \binom{N}{k} q^k (1 - q)^{N-k}, \text{ pour } k = 0, \dots, N.$$

Prenons l'exemple du call européen avec $g(s) = (s - K)_+$. Soit

$$\eta_N = \inf\{k = 0, \dots, N ; S_0 u^k d^{N-k} > K\}, \quad (1.16)$$

et $\bar{F}(n, p, k) = \mathbb{P}[\text{Bin}(n, p) > k]$. On a

$$\pi = R_N^{-N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_N - K)_+] = S_0 \bar{F}\left(N, \frac{qu}{R_N}, \eta_N\right) - R_N^{-N} K \bar{F}(N, q, \eta_N). \quad (1.17)$$

1.4 Annexes: Approximation normal dans le modèle de Cox-Rubinstein-Ross

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est une approximation d'un modèle en temps continu obtenu en laissant N tendre vers l'infini. On note que sous la probabilité historique \mathbb{P} et avec $p = 1/2$, il vient

$$\log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = N\mu_N + Z_N\sigma_N = \mu T + \frac{Z_N}{\sqrt{N}}\sigma\sqrt{T} \stackrel{\text{TCL}}{\sim} \text{Normal}(\mu T, \sigma^2 T)$$

Les log rendements gaussien sont une caractéristique du modèle de Black-Scholes qu'on étudiera par la suite. Faire tendre N vers l'infini permet également d'approcher le prix du call (1.17). On a besoin du résultat suivant.

Lemma 2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes tel que $X_k \sim \text{Bin}(k, p_k)$ pour $k \geq 1$ t alors

$$\frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \xrightarrow{D} \text{Normal}(0, 1), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Proof. On montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{tX_n}) = e^{t^2/2}.$$

□

D'après la définition de η_N , voir (1.16), on a l'encadrement

$$S_0 u^{\eta_n - 1} d^{N - \eta_n + 1} \leq K \leq S_0 u^{\eta_n} d^{N - \eta_n}.$$

On en déduit en passant au log que

$$\eta_N \sigma \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}} + N \left(\mu \frac{T}{N} - \sigma \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right) = \ln(K/S_0) + o(\sqrt{N})$$

puis

$$\eta_N = \frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2\sigma\sqrt{T}} [\log(K/S_0) - \mu T] + o(\sqrt{N}), \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

On a également

$$q_N = \frac{e^{r\frac{T}{N}} - e^{\mu\frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{\mu\frac{T}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{\mu\frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}$$

Un développement limité à l'ordre 1 permet de conclure que $q_N \rightarrow 1/2$ pour $N \rightarrow +\infty$. Un développement limité à l'ordre 2 permet d'observer que

$$Nq_N = \frac{N}{2} + \frac{(r - \mu - \sigma^2/2)T}{2\sigma\sqrt{T}} \sqrt{N} + o(\sqrt{N})$$

et de conclure que

$$\frac{\eta_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\log(\tilde{K}/S_0) + \sigma^2/2] = d^+,$$

où $\tilde{K} = Ke^{-rT}$. On a également

$$\frac{q_N u_N}{R} = \frac{e^{r\frac{T}{N}} - e^{\mu\frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{\mu\frac{T}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{\mu\frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}} \cdot \frac{e^{\mu\frac{T}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{r\frac{T}{N}}} = \frac{e^{(r+\mu)\frac{T}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{2\mu\frac{T}{N}}}{e^{(r+\mu)\frac{T}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{(r+\mu)\frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$\frac{q_N u_N}{R} \rightarrow 1/2, \text{ et } N \frac{q_N u_N}{R} = \frac{N}{2} + \frac{(r - \mu + \sigma^2/2)T}{2\sigma\sqrt{T}} \sqrt{N} + o(\sqrt{N}) \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

Il vient alors

$$\frac{\eta_N - N q_N u_N / R}{\sqrt{N q_N u_N / R (1 - q_N u_N / R)}} \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\log(\tilde{K}/S_0) - \sigma^2/2] = d^-.$$

On conclut que

$$\pi_N \approx S_0 [1 - \phi(d^-)] - \tilde{K} [1 - \phi(d^+)].$$

où $\phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite. On vérifie avec Python!

1.5 Annexes: Blockchain, cryptomonnaie et double dépense

Une blockchain est une base de données constituée de blocs successifs maintenue par un réseau pair-à-pair, comme sur la [Figure 1.4](#). Les noeuds légers se contentent d'émettre des informations

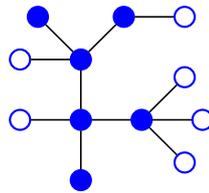


Figure 1.4: Un réseau fait de noeuds lourds (bleu) et de noeuds légers (blanc)

(appelées transactions). Les noeuds lourds doivent vérifier la cohérence des transactions et s'accorder sur les informations à inscrire dans la blockchain. Les noeuds lourds appliquent un protocole de consensus pour se mettre d'accord. La preuve de travail ou *Proof-of-Work* est le protocole utilisé dans le cadre de la blockchain des bitcoins, voir le whitepaper de [Nakamoto \[2008\]](#). Un bloc doit être ajouté toutes les dix minutes environ, les noeuds sont en compétition pour résoudre un problème cryptographique brutalement via une méthode essai-erreur (*trial and error*). Le premier qui parvient à résoudre le problème ajoute le bloc et récupère une récompense d'un montant de BTC6.25 à l'heure de l'écriture.⁴

Dans la blockchain des bitcoins, les informations enregistrées sont des échanges de bitcoin entre les participants. Un noeud peut facilement émettre deux transactions conflictuelles, c'est à dire qui transfèrent les mêmes unités à deux entités différentes. Il s'agit d'une attaque par double dépense. Le scénario standard est le suivant:

1. Marie transfère à John BTC10
2. La transaction de Marie à John est enregistrée dans la blockchain

⁴<https://bitcoinblockhalf.com/>

3. John doit attendre $\alpha \in \mathbb{N}$ confirmations, c'est à dire que α blocs soient ajoutés après celui dans lequel la transaction de Marie à John est inscrite
4. Une fois que α confirmations ont été envoyées, John envoie le bien à Marie
5. Pendant ce temps, Marie travaille sur sa propre version de la blockchain (dite privée) dans laquelle la transaction de Marie à John est remplacée par une transaction de Marie à elle même
6. Au moment de la livraison du bien la blockchain dite principale est en avance de z blocs
7. L'objectif de Marie est générer une chaine concurrente plus longue que la chaine principale. Si elle y parvient, elle la communiquera à l'ensemble du réseau pour créer une fourche (*fork*). Le réseau optera alors pour la branche la plus longue. La branche de Marie va alors remplacer la branche principale permettant à Marie de récupérer ses unités qu'elle peut dépenser à nouveau.

Cette course entre les deux branches est résumée sur la [Figure 1.5](#). Notre objectif est de calculer

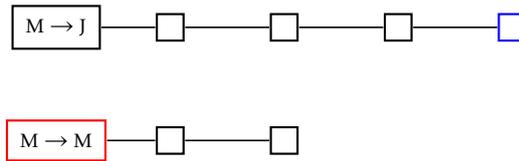


Figure 1.5: La course à la double dépense illustrée, ici nous avons $\alpha = 4$ et $z = 2$

la probabilité que la branche de Marie devienne majoritaire. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la différence de longueur entre la branche de Marie et la branche principale de la blockchain. On a $Z_0 = z \geq 0$ et la double dépense se produit à l'instant aléatoire

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 ; Z_n = 0\}. \quad (1.18)$$

Nous souhaitons étudier la distribution de τ_0 et en particulier calculer la probabilité de double dépense définie par

$$\phi(z) = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | Z_0 = z) := \mathbb{P}_z(\tau_0 < \infty) \quad (1.19)$$

A chaque instant $k \in \mathbb{N}$ un bloc est ajouté, il appartient

- A la branche principale avec probabilité $p \in (0, 1)$
- à la branche de Marie avec probabilité $1 - p$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit une suite $(\xi_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. de variables aléatoires (v.a.) de loi

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p.$$

On en déduit que

$$Z_n = z + \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Le processus Z_n est un processus à temps discret et à valeur dans \mathbb{Z} . Une visualisation du problème de premier passage est donné sur la [Figure 1.6](#). L'application du [Theorem 1](#) avec

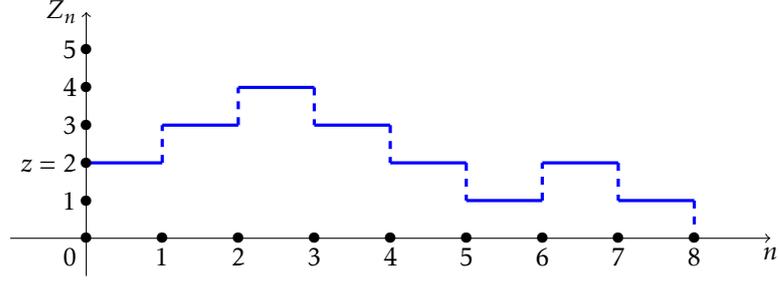


Figure 1.6: Illustration du problème de premier passage sous-jacent à la double dépense.

$a \rightarrow \infty$ permet de résoudre le problème avec

$$\phi(z) = \left(\frac{q}{p}\right)^z.$$

1.6 Annexes: Convergence des Martingales

Cette section présente des résultats sur l'existence d'une loi limite pour les processus martingales. Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ un processus défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté à la filtration \mathcal{F}_n tel que X_n est intégrable pour tout $n \geq 0$.

Theorem 6. [De convergence des martingales] Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une S -martingale bornée dans L^1 , c'est à dire telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_n)_+] < \infty,$$

alors X_n converge presque sûrement et dans L^1 vers une v.a. intégrable X_∞ .

Proof. La démonstration du résultat nécessite de montrer un lemme pour lequel nous avons besoin d'introduire les objets suivants. Soit $a < b$ deux réels, on note

- $S_0 = T_0 = 0$,
- $S_1 = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq a\}$ et $T_1 = \inf\{n > S_1 : X_n \geq b\}$,
- $S_{m+1} = \inf\{n > T_m : X_n \leq a\}$ et $T_{m+1} = \inf\{n > S_m : X_n \geq b\}$,

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $M = \sup\{m \geq 0, T_m \leq N\}$, noté $M_N(a, b)$ qui correspond au nombre de traversées montantes de l'intervalle (a, b) par le processus X jusqu'au temps N , en effet, on a

$$X_{S_1} \leq a, X_{T_1} \geq b, \dots, X_{S_M} \leq a, X_{T_M} \geq b.$$

Lemma 3. Si X est une sur-martingale alors

$$(b - a)\mathbb{E}[M_N(a, b)] \leq \mathbb{E}[(X_N - a)_-],$$

où $(x)_- = -\min(0, x)$ est la partie négative de x .

Proof. TODO □

Montrons le théorème dans le cas d'une sur-martingale . Le cas d'une sous-martingale s'en déduit car si X est une sous-martingale, bornée dans L^1 alors $Y = -X$ est une sur-martingale bornée dans L^1 et le résultat s'applique. Pour une trajectoire $n \mapsto X_n(\omega)$ jusqu'au temps, le nombre de traversées montante $M_N(a, b)$ est une suite croissante en N , on note

$$M(a, b) = \sup_{N \geq 0} M_N(a, b).$$

On remarque que

$$(b - a)\mathbb{E}[M_N(a, b)] \leq \mathbb{E}[(X_n - a)_-] \leq \mathbb{E}(|X_N|) + |a| \leq \sup_{N \geq 0} \mathbb{E}(|X_N|) + |a| < \infty$$

Cela implique que $M(a, b)$ est fini presque sûrement. Si X ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour une trajectoire ω , alors on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega).$$

Il existe alors deux rationnels $a < b$ tels que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega).$$

Dans ce cas $M(a, b) = \infty$, cela signifie que ω appartient à un ensemble de probabilité nulle. Par contraposée, le processus X converge sauf sur des ensemble de mesure nulle et donc presque sûrement. De plus, on a

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n|) \stackrel{\text{Lemme de Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|) \leq \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

□

On déduit du théorème précédent le corollaire suivant:

Corollary 1. *Soit X une sur-martingale positive alors*

$$X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ existe presque sûrement,}$$

et vérifie $X_n \geq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$.

Proof. Une sur-martingale positive est bornée dans L^1 donc le [Theorem 6](#) s'applique. □

Dans la suite nous avons besoin de la notion d'uniforme intégrabilité (UI).

Definition 18. *Le processus X est uniformément intégrable (UI) si*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{I}_{|X_n| > M}) = 0$$

Cela équivaut à

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall n \geq 0, \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{I}_{|X_n| > M}) < \epsilon$$

Exemple 10. Un processus X dominé par une v.a. intégrable Y est UI. En effet, pour tout $n \geq 0$

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{I}_{|X_n| > M}) \leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|X_n| > M}) \leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > M})$$

On note que $\mathbb{E}(|Y|) = \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| \leq M} + \mathbb{I}_{|Y| > M})$ et $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| \leq M}) = \mathbb{E}(|Y|)$ cela implique que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > M}) = 0.$$

En particulier, le processus

$$X_n = \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n), \quad n \geq 0,$$

est une martingale UI.

Une notion proche de l'uniforme intégrabilité est l'équi-intégrabilité

Definition 19. Le processus X est equi-intégrable (EI) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{F}, \forall n \geq 0, \mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \mathbb{E}(|X| \mathbb{I}_A) < \epsilon$$

La convergence des martingales est liée au fait que le processus soit bornée dans L^1 , le résultat fait le lien entre uniforme intégrabilité et le fait que X soit borné dans L^1 .

Proposition 8. Soit X un processus intégrable, les assertions suivantes sont intégrables

- (i) X est UI
- (ii) X est borné dans L^1 et X est EI.

Proof. TODO □

La notion d'uniforme intégrabilité permet de faire le pont entre convergence dans L^1 et convergence en probabilité.

Theorem 7. Soit X un processus et X_∞ une v.a. intégrable, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) X est UI et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$.
- (ii) X est intégrable et $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$.

Proof. TODO □

Avant de poursuivre, on introduit la notion de S-martingale fermée.

Definition 20. Une S-martingale X est fermée à droite par une v.a. intégrable Z si

$$\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n) = X_n \text{ (resp } \geq X_n \text{ ou } \leq X_n)$$

dans le cas d'une martingale (resp. d'une sous ou sur - martingale)

On peut connecter la notion de martingale fermée et UI via le résultat suivant

Proposition 9. Soit Z une v.a. intégrable alors la martingale définie par

$$X_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$$

est UI.

Proof. On a $X_n \leq Z_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$, on a pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_{|X_n| > M}) \leq \mathbb{E}(Z_n \mathbb{I}_{|Z_n| > M}) = \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| > M})$$

Il faut démontrer que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| < M}).$$

On a, pour $N, M > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| > M}) &= \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| > M, |Y| \leq N}) + \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| > M, |Y| > N}) \\ &\leq N \mathbb{P}(|Z_n| > M) + \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > N}) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} N \frac{\mathbb{E}(|Z_n|)}{M} + \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > N}) \\ &\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} N \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{M} + \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > N}) \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Y| > N}) < \epsilon/2$ (comme Y est intégrable, c'est possible). On choisit alors $M = \frac{\mathbb{E}(2|Y|)N}{\epsilon}$, il vient

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|Y| \mathbb{I}_{|Z_n| < M}) \leq \epsilon.$$

□

On peut énoncer le théorème de convergence suivant

Theorem 8. Soit X une S -martingale alors

$$X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty \Leftrightarrow X \text{ est UI}$$

Dans ce cas, X converge presque sûrement vers X_∞ et est fermée à droite par X_∞

Proof. TODO

□

Corollary 2. Soit X une martingale, Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) X est UI

(ii) $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

(iii) X est fermée à droite : $\exists Z \in L^1, \forall n \geq 0, \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = X_n$

Proof. TODO

□

On peut aussi énoncer un théorème d'arrêt avec des temps d'arrêt quelconques (pas nécessairement bornés)

Theorem 9. *Supposons que X est une S -martingale UI alors pour deux temps d'arrêt (quelconques) tels que $\sigma \leq \tau$, on a*

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \text{ (resp } \geq X_\sigma \text{ ou } \leq X_\sigma)$$

dans le cas d'une martingale (resp. d'une sous ou sur - martingale). En particulier, on a

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

Proof. TODO

□

Bibliography

Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher. *Ruin Probabilities*. WORLD SCIENTIFIC, sep 2010. doi: 10.1142/7431.

Hans U. Gerber. Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes. *Operations Research*, 20(1):37–45, February 1972. ISSN 1526-5463. doi: 10.1287/opre.20.1.37.

Andreas E. Kyprianou. *Gerber-Shiu Risk Theory*. Springer London, Limited, 2013. ISBN 9783319023038.

Andreas E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer London, Limited, 2014. ISBN 9783642376320.

Jean-Claude Laleuf. *Processus et intégrales stochastiques (Cours et exercices corrigés)*. Paris, 2014.

Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.

Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View*. WORLD SCIENTIFIC, oct 1998. doi: 10.1142/3856.

Koichi Miyasawa. *An economic survival game*. Econometric Research Program, Princeton University, 1961.

S. Nakamoto. Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. Available at <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>, 2008. URL <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.

Peter Tankov and Nizar Touzi. Calcul stochastique en finance. *Ecole Polytechnique Paris, Département de Mathématiques Appliquées*, page 146, 2010.

Lionel Truquet. Statistiques des processus 3a. Lecture notes, 2015. <https://ensai.fr/wp-content/uploads/2019/06/polystatdesprocessus2.pdf>.

David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, feb 1991. doi: 10.1017/cbo9780511813658.

Chapter 2

Processus et martingale en temps continu

On étend les notions de temps d'arrêt et de martingale aux processus à temps continu. Nous introduisons la notion de processus de Lévy qui sont l'équivalent de la marche aléatoire en temps continu. L'exemple fil rouge sera un modèle de gestion des risques des compagnies d'assurances basé sur le processus de Poisson composé.

2.1 Le modèle de ruine de Cramer-Lundberg

L'objectif est de proposer un modèle pour l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance au cours du temps via un processus $X := (X_t)_{t \geq 0}$, avec $t \in \mathbb{R}_+$. Une compagnie d'assurance détient un capital initial $x \geq 0$, perçoit des primes de la part des assurés au taux $c > 0$ et paie de temps à autre une indemnisation. Le nombre de sinistres jusqu'à l'instant t est donnée par un processus de comptage $N := (N_t)_{t \geq 0}$.

Definition 21. *Un processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus en temps continu qui compte le nombre d'occurrence d'un évènement au cours du temps*

$$N_0 = 0 \text{ et } N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{T_k \leq t}.$$

où T_1, T_2, T_3, \dots désigne les temps d'arrivée des évènements, avec la convention $T_0 = 0$. Soit $\Delta_0^T, \Delta_1^T, \Delta_2^T, \dots$ la suite des temps inter-arrivée définis par

$$\Delta_k^T = T_{k+1} - T_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Un exemple de trajectoire d'un processus de comptage est donnée par la [Figure 2.1](#)

Definition 22. *Une v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ est une v.a. continue de densité*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}.$$

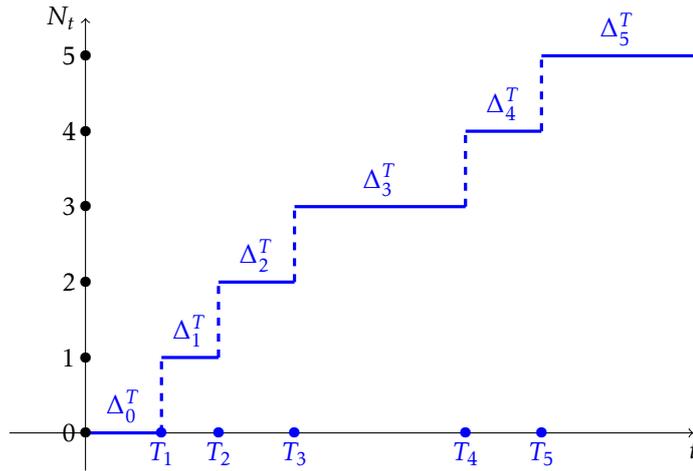


Figure 2.1: Une trajectoire du processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$.

Definition 23. Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ est un processus de comptage dont les temps inter-arrivée i.i.d. sont de loi exponentielle $\text{Exp}(\lambda)$.

Remark 9. Le processus de Poisson appartient à la famille des processus de renouvellement qui sont des processus de comptage dont les temps inter-arrivée sont i.i.d..

Proposition 10. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de comptage, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes:

- (i) $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ
- (ii) Les accroissements de $(N_t)_{t \geq 0}$ sont
 - indépendants, c'est à dire $N_t - N_s$ et N_s sont indépendants pour tous $s \leq t$,
 - stationnaires c'est à dire que

$$N_t - N_s = N_{t-s} \sim \text{Pois}(\lambda \cdot (t - s)).$$

On note que $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ et que λ correspond au nombre moyen de sauts par unité de temps.

Dans le modèle considéré, l'arrivée des sinistres est modélisée par un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$. Pour chaque sinistre une indemnisation est versée aux assurés. ces indemnisation forment une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de v.a. i.i.d. et positives. Finalement la richesse de la compagnie d'assurance est donnée par

$$X_t = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} U_k, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Usuellement les primes sont reçues à la date d'anniversaire des contrats. Ici, on suppose que le portefeuille est suffisamment important pour pouvoir approcher l'encaissement des primes par une fonction linéaire de pente c . La gestion des risque repose souvent sur la définition d'une

mesure de risque qui résume par un nombre le risque sous-jacent. En théorie du risque, on utilise la probabilité de ruine à un horizon de temps $T \geq 0$ définie par

$$\psi(x, T) = \mathbb{P}(\tau_0^- \leq T),$$

où $\tau_0^- = \inf\{t \geq 0 ; X_t \leq 0\}$ est le premier instant pour lequel la richesse de l'assureur passe en dessous de 0. L'objectif de l'actuaire est dès lors de déterminer un niveau de prime c et une richesse initiale x associé à un niveau de risque $\psi(x, T) = 1 - \alpha$. La directive européenne Solvabilité II impose un niveau de risque $\alpha = 99.5\%$ à horizon de temps $T = 1$ an. Le niveau de prime compense le cout moyen des sinistre par unité de temps avec

$$c = (1 + \eta) \frac{1}{t} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{N_t} U_k \right) = (1 + \eta) \lambda \mathbb{E}(U),$$

où $\eta > 0$ est le chargement de sécurité (de combien la prime commercial excède la prime pure). On définit également la probabilité de ruine ultime par

$$\psi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(x, T),$$

nous verrons que si $\eta \leq 0$ alors $\psi(x) = 1$. Une fois le niveau de prime fixé, le seul paramètre à ajusté est le niveau de richesse initiale x dont la détermination passe par l'évaluation numérique de la probabilité de ruine.

2.2 Généralités sur les processus en temps continu

2.2.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Definition 24. Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une suite croissante croissante pour l'inclusion avec

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \text{ pour } s \leq t,$$

de sous-tribu de \mathcal{F} .

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. \mathcal{F}_t correspond à l'information disponible au temps t ,

Definition 25. Une suite $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de variable aléatoires (v.a.) sur Ω est un processus stochastique en temps continu. X est \mathcal{F}_t -adapté si X_t est mesurable par rapport à \mathcal{F}_t pour tout $t \geq 0$.

Remark 10. La filtration \mathcal{F}_t associée à un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est l'information qu'il faut détenir pour pouvoir tracer la trajectoire du processus jusqu'à l'instant $t \geq 0$. Pour le processus de comptage, il s'agit des instants de saut

$$\mathcal{F}_t = \sigma[(\mathbb{I}_{T_k \leq t})_{k \geq 0}].$$

Pour le processus de richesse il faut ajouter la taille des sauts

$$\mathcal{F}_t = \sigma[(U_k \mathbb{I}_{T_k \leq t})_{k \geq 0}].$$

2.2.2 Propriétés fonctionnelles

Soit $\omega \in \Omega$, est une trajectoire ou réalisation. Il s'agit d'une fonction du temps $t \mapsto X_t(\omega)$ dont on peut étudier les propriétés comme la monotonie, la continuité, et la dérivabilité

- Un processus X est croissant la fonction $t \mapsto X_t$ est croissante presque sûrement (p.s.).
- Un processus X est continu à droite, continu, dérivable, de classe \mathcal{C}^2 , ... si $t \mapsto X_t$ vérifie la propriété considéré.

Exemple 11. Les trajectoires des processus de comptages sont continues à droite et limitées à gauche (càdlàg), cela signifie que

- $\lim_{s \uparrow t} X_s$ existe
- $\lim_{s \downarrow t} X_s$ existe et est telle que $\lim_{s \downarrow t} X_s = X_t$

La filtration \mathcal{F}_{T_i} jusqu'à un instant de saut T_i implique la continuité juste après le saut. Sinon la trajectoire est continue par morceaux. Même remarque pour le processus de richesse. Nous supposons que les processus considéré dans ce chapitre sont càdlàg.

2.3 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Definition 26. Un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+$$

Exemple 12. 1. Les constantes sont des temps d'arrêts

2. Si τ et σ sont des temps d'arrêts alors

$$\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \text{ et } \tau + \sigma$$

sont également des temps d'arrêt.

3. Si X est un processus \mathcal{F}_t -adapté, continu à droite et tel que $X_0 = 0$, alors

$$\tau_a^+ = \inf\{t \geq 0 ; X_t \geq a\}$$

est un temps d'arrêt. En effet

$$\{\tau_a > t\} = \{X_s \leq a ; s \leq t\} = \bigcap_{s \in \mathbb{Q} \leq t} \{X_s \geq a\} \in \mathcal{F}_t. \quad (2.2)$$

L'hypothèse de continuité à droite est ici primordiale pour définir une suite de rationnelle $s_n \rightarrow s$ tel que $X_{s_n} \rightarrow X_s$ presque sûrement. On passe à la limite (2.2) et la stabilité des tribus par intersection dénombrable permet de conclure.

4. le temps de dernier passage

$$T_a = \sup\{t \geq 0 ; X_t > a\}$$

n'est en général pas un temps d'arrêt.

5. Le temps de ruine

$$\tau_0^- = \inf\{t \geq 0 ; X_t \leq 0\}$$

est un temps d'arrêt.

2.4 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et X un processus \mathcal{F}_t -adapté.

Definition 27. X est une \mathcal{F}_t -martingale si

- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ pour $t \geq 0$
- $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ pour tout $s \leq t$.

Example 13. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson et $(U_i)_{i \geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d..

1. le processus $N_t - \lambda t$ est une martingale
2. le processus $\sum_{i=1}^{N_t} U_i - \lambda \mathbb{E}(U)t$ est une martingale

Definition 28. X est une \mathcal{F}_t -sous martingale (resp. sur martingale) si

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ (resp. } \leq X_s)$$

Une martingale est un processus constant en moyenne, une sous martingale est un processus croissant en moyenne, et une sur martingale est un processus décroissant en moyenne.

Theorem 10. Soit X une martingale et τ un temps d'arrêt, alors le processus $(X_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$ est une martingale. De plus, si τ est borné alors

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

Remark 11. Lorsque τ n'est pas bornée, une technique classique consiste à considérer le temps d'arrêt $\tau \wedge t$ puis à faire tendre t vers ∞

Des résultats de convergences plus avancés, analogue au temps discret, sont présentés en annexe de ce chapitre. Pour un exposé plus exhaustif avec notamment toutes les preuves, on peut consulter l'ouvrage de Gall [2012, Chapitre 3]¹ et Laleuf [2014, Chapitre 5].

¹http://raphaelducatez.neowordpress.fr/wp-content/uploads/sites/20439/2019/02/Jean-Francois_Le_Gall_auth._Mouvement_brownienb-ok.cc_.pdf

2.5 Processus de Lévy

2.5.1 Définitions

L'équivalent des marches aléatoires en temps continu sont les processus de Lévy. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et X un processus \mathcal{F}_t -adapté.

Definition 29. X est un processus de Lévy s'il possède les propriétés suivantes:

1. $X_0 = 0$
2. $X_t - X_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{t-s}$ (Accroissements stationnaires)
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n < \infty$, les accroissements

$$X_{t_i} - X_{s_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

sont indépendants.

4. Les trajectoires de X sont càdlàg

Example 14. 1. Le processus de Poisson N est un processus de Lévy avec

$$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s)), \quad \text{pour } 0 \leq s < t < \infty.$$

2. Le processus de poisson composé

$$\sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \geq 0,$$

est un processus de Lévy.

3. Le processus de richesse

$$ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \geq 0,$$

est un processus de Lévy.

Remark 12. On considère le modèle de Cramer-Lundberg

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \geq 0.$$

Soit T_1, T_2, \dots les instants de sauts du processus de Poisson et $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots$, les temps inter-arrivées. Si on observe le processus de richesse aux instants de saut, on définit un processus de richesse à temps discret avec

$$Y_n = X_{T_n} = x + cT_n - \sum_{i=1}^{N_{T_n}} U_i = x + c \sum_{i=1}^n \Delta T_{i-1} - \sum_{i=1}^n U_i = x + \sum_{i=1}^n (c\Delta T_{i-1} - U_i), \quad n \geq 0.$$

Il s'agit d'un marche aléatoire, identique à celle étudié dans la [Section 1.2](#).

Soit X un processus de Lévy.

Definition 30. L'exposant de Laplace de X est défini par

$$\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta X_1}).$$

Il s'agit de la fonction génératrice des cumulants de X_1 .

Example 15. L'exposant de Laplace du processus de Poisson N d'intensité λ est donnée par

$$\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta N_1}) = \lambda(e^\theta - 1).$$

Proposition 11. On a

$$\log \mathbb{E}(e^{\theta X_t}) = \kappa(\theta)t, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Proof. Soit $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on décompose X_t avec

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{(k+1)\frac{t}{n}} - X_{k\frac{t}{n}} \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta X_t}) &= \mathbb{E} \left(e^{\theta \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{(k+1)\frac{t}{n}} - X_{k\frac{t}{n}} \right)} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(e^{\theta \left(X_{(k+1)\frac{t}{n}} - X_{k\frac{t}{n}} \right)} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(e^{\theta X_{t/n}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{\theta X_{t/n}} \right)^n \end{aligned}$$

Si on note

$$\kappa_t(\theta) = \log \mathbb{E} \left(e^{\theta X_t} \right)$$

On a donc $\forall t \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\kappa_t(\theta) = n\kappa_{t/n}(\theta).$$

De plus pour $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\kappa_m(\theta) = m\kappa(\theta) \text{ et } \kappa_m(\theta) = n\kappa_{m/n}(\theta).$$

On en déduit que

$$\kappa_t(\theta) = t\kappa(\theta) \text{ pour } t \in \mathbb{Q}$$

On peut alors considérer une suite $(t_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}$ tel que $t_n \downarrow t \in \mathbb{R}$ puis passer à la limite

$$\kappa_{t_n}(\theta) = t_n\kappa(\theta) \text{ pour } t_n \in \mathbb{Q}.$$

Tout cela est possible grâce à la continuité à droite des trajectoires du processus. □

Proposition 12 (Martingale de Wald). Le processus

$$M_t = \exp[\theta X_t - t\kappa(\theta)], \quad t \geq 0.$$

est une \mathcal{F}_t -martingale.

Proof. soit $s \leq t$, On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) &= e^{-t\kappa(\theta)} \mathbb{E} \left[e^{\theta X_t} | \mathcal{F}_s \right] \\
&= e^{-t\kappa(\theta)} \mathbb{E} \left[e^{\theta(X_t - X_s) + \theta X_s} | \mathcal{F}_s \right] \\
&= e^{-t\kappa(\theta)} e^{\theta X_s} \mathbb{E} \left[e^{\theta(X_t - X_s)} \right] \\
&= e^{-t\kappa(\theta)} e^{\theta X_s} e^{(t-s)\kappa(\theta)} \\
&= M_s
\end{aligned}$$

□

Cette martingale est très pratique pour résoudre des problèmes de premier passage pour des processus de Lévy, conjointement avec la propriété de Markov forte.

Theorem 11. Soit τ un temps d'arrêt borné. Le processus \tilde{X} défini par

$$\tilde{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, t \geq 0,$$

est un processus de Lévy indépendant de \mathcal{F}_τ de même loi que X .

Proof. Admis, voir [Kyprianou \[2014, Chapitre 3\]](#)

□

L'étude de temps de premier passage est centrale en théorie du risque et est l'objet de la théorie de la fluctuation. Pour une vue exhaustive, le lecteur peut consulter l'ouvrage de [Kyprianou \[2014\]²](#). Nous nous focalisons dans la section suivante sur le processus de Cramer Lundberg.

2.5.2 Application à l'étude du processus de Cramer-Lundberg

On considère le processus

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Soit

$$\tau_0^- = \inf\{t \geq 0 ; X_t \leq 0\},$$

le temps de ruine.

Proposition 13. Si $c \leq \lambda \mathbb{E}(U)$ alors

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) = 1.$$

Proof. On note que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{t} + c - \frac{N_t}{t} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{N_t} \right) = c - \lambda \mathbb{E}(U),$$

²<https://people.bath.ac.uk/ak257/book2e/book2e.pdf>

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } c - \lambda \mathbb{E}(U) > 0, \\ ?, & \text{si } c - \lambda \mathbb{E}(U) = 0, \\ -\infty, & \text{si } c - \lambda \mathbb{E}(U) < 0. \end{cases}$$

Pour le cas $c - \lambda \mathbb{E}(U) = 0$, il faut considérer la marche aléatoire $Z_n = X_{T_n}$ qui est récurrente, ce qui implique que l'état 0 est récurrent et donc $\psi(u) = 1$. \square

Le résultat suivant donne une borne superieur pour la probabilité de ruine.

Theorem 12. *Supposons que $c > \lambda \mathbb{E}(U)$ alors*

$$\psi(x) = \frac{e^{-\theta^* x}}{\mathbb{E}[e^{\theta^* d(x)} | \tau_0^- < \infty]},$$

où θ^* est la seule solution strictement positive de l'équation

$$-\theta c + \lambda[\mathbb{E}(e^{\theta U}) - 1] = 0,$$

et $d(x) = -X_{\tau_0^-}$ est le définit à la ruine.

Proof. Le processus Y défini par

$$Y_t = x - X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - ct, \quad t \geq 0,$$

est un processus de Lévy d'exposant de Laplace

$$\kappa(\theta) = -c\theta + \lambda[\mathbb{E}(e^{\theta U}) - 1].$$

On note que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \kappa(\theta) = \infty$, $\kappa(0) = 0$ et $\kappa'(0) = \lambda \mathbb{E}(U) - c < 0$. Cela implique que l'équation

$$\kappa(\theta) = 0$$

a une unique solution strictement positive θ^* . Le processus $(e^{\theta^* Y_t})_{t \geq 0}$ est une martingale en vertu de la [Proposition 12](#). On applique le théorème du temps d'arrêt optionnel au temps d'arrêt $\tau_0^- \wedge t$ pour $t \geq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_0}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_{\tau_0^- \wedge t}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_{\tau_0^-}} \mathbb{I}_{t > \tau_0^-} + e^{\theta^* Y_t} \mathbb{I}_{t \leq \tau_0^-}) \end{aligned}$$

On fait tendre t vers $+\infty$ pour obtenir

$$1 = \mathbb{E}(e^{\theta^* Y_{\tau_0^-}} | \tau_0^- < \infty) \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) = e^{\theta^* x} \mathbb{E}(e^{-\theta^* X_{\tau_0^-}} | \tau_0^- < \infty) \psi(x)$$

ce qui est équivalent à

$$\psi(x) = \frac{e^{-\theta^* x}}{\mathbb{E}(e^{-\theta^* X_{\tau_0^-}} | \tau_0^- < \infty)}.$$

\square

Il s'agit d'un résultat fondateur de théorie de la ruine, voir l'ouvrage de référence de [Asmussen and Albrecher \[2010\]](#) et l'application de la théorie de la fluctuation au processus de Cramer-Lundberg, voir [Kyprianou \[2013\]](#)³.

2.6 Annexe: Convergence des martingales en temps continu

L'hypothèse que les trajectoires des processus soient càdlàg est important pour pouvoir généraliser les résultats obtenus en temps discret au cas continu. On peut ainsi créer une des suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_+$ tel que $q_n \rightarrow t$ et $X_{q_n} \rightarrow X_t$ presque sûrement.

Theorem 13. *Si X est une S -martingale bornée dans L^1 (c'est à dire $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$) alors $(X_t)_{t \geq 0}$ converge presque sûrement vers une v.a. X_∞ intégrable.*

Proof. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$, on note $M((X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}, a, b) = \sup_S M((X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}, a, b)$, où S est l'ensemble des suites finies croissantes de \mathbb{Q}^+ le nombre de traversée montantes de l'intervalle (a, b) du processus (à temps discret) $(X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}$. On a

$$(b - a)\mathbb{E}[M((X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}, a, b)] \leq \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|X_t|) + |a|,$$

puis $M((X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}, a, b) < \infty$ presque sûrement. Si la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ n'a pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et comme $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite, il existe une suite de nombres rationnels $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $q_n \rightarrow \infty$ et

$$\liminf_n X_{q_n}(\omega) < \limsup_n X_{q_n}(\omega).$$

Il existe $a, b \in \mathbb{Q}_+$ tels que

$$\liminf_n X_{q_n}(\omega) \leq a < b \leq \limsup_n X_{q_n}(\omega),$$

et donc $M((X_q)_{q \in \mathbb{Q}^+}, a, b)(\omega) < \infty$ alors ω appartient à un ensemble de mesure nulle. Enfin la limite X_∞ est intégrable et donc finie presque sûrement. En effet, pour toute suite $(t_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}_+$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$, on a

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\lim |X_{t_n}|) = \mathbb{E}(\liminf |X_{t_n}|) \leq \liminf \mathbb{E}(|X_{t_n}|) \leq \sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty.$$

□

Bibliography

Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher. *Ruin Probabilities*. WORLD SCIENTIFIC, sep 2010. doi: 10.1142/7431.

Hans U. Gerber. Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes. *Operations Research*, 20(1):37–45, February 1972. ISSN 1526-5463. doi: 10.1287/opre.20.1.37.

³<https://people.bath.ac.uk/ak257/GSZurich-Guanajuato.pdf>

- Andreas E. Kyprianou. *Gerber-Shiu Risk Theory*. Springer London, Limited, 2013. ISBN 9783319023038.
- Andreas E. Kyprianou. *Fluctuations of lévy Processes with Applications*. Springer London, Limited, 2014. ISBN 9783642376320.
- Jean-Claude Laleuf. *Processus et intégrales stochastiques (Cours et exercices corrigés)*. Paris, 2014.
- Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.
- Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View*. WORLD SCIENTIFIC, oct 1998. doi: 10.1142/3856.
- Koichi Miyasawa. *An economic survival game*. Econometric Research Program, Princeton University, 1961.
- S. Nakamoto. Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. Available at <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>, 2008. URL <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
- Peter Tankov and Nizar Touzi. Calcul stochastique en finance. *Ecole Polytechnique Paris, Département de Mathématiques Appliquées*, page 146, 2010.
- Lionel Truquet. Statistiques des processus 3a. Lecture notes, 2015. <https://ensai.fr/wp-content/uploads/2019/06/polystatdesprocessus2.pdf>.
- David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, feb 1991. doi: 10.1017/cbo9780511813658.

Chapter 3

Chaîne de Markov en temps continu

On s'intéresse dans ce chapitre à l'extension des chaînes de Markov en temps continu. Le contenu de ce chapitre s'inspire des notes de cours de [Truquet \[2015\]](#) et de l'ouvrage de [Dobrow \[2016\]](#).

3.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et X un processus stochastique \mathcal{F}_t -adapté à valeur sur un espace d'état dénombrable E .

Definition 31. *Le processus X est un processus de Markov si*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x, \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x), \quad \forall s, t \geq 0, \text{ et } x, y \in E.$$

Le processus de Markov X est dit homogène si de plus

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x).$$

Les probabilités de transition peuvent donc être placées dans des matrices de transition indicées sur le temps $(P_t)_{t \geq 0}$, définies par

$$P_t = (p_t(x, y))_{x, y \in E} = (\mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x))_{x, y \in E}$$

Soit X un processus de Markov de probabilité de transition $(p_t)_{t \geq 0}$. On retrouve les mêmes propriétés que pour les chaînes de Markov, par exemple les équations de Chapman-Kolmogorov.

Proposition 14.

$$P_{t+s} = P_t P_s, \quad \forall s, t \geq 0.$$

Proof. Soit $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned}
 p_{t+s}(x, y) &= \mathbb{P}(X_{s+t} = y | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{s+t} = y, X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{s+t} = y | X_s = z, X_0 = x) \mathbb{P}(X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{s+t} = y | X_s = z) \mathbb{P}(X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = z) \mathbb{P}(X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in E} p_s(x, z) p_t(z, y)
 \end{aligned}$$

□

Example 16. Le processus de Poisson N d'intensité λ est un processus de Markov sur \mathbb{N} ! La propriétés d'accroissements indépendants et stationnaires implique la propriété de Markov. On a, pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \leq j$ et $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_{s+t} = j | N_s = i) &= \frac{\mathbb{P}(N_{s+t} = j, N_s = i)}{\mathbb{P}(N_s = i)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = j - i, N_s = i)}{\mathbb{P}(N_s = i)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = j - i) \mathbb{P}(N_s = i)}{\mathbb{P}(N_s = i)} \\
 &= \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = j - i) \\
 &= \mathbb{P}(N_t = j - i) = p_t(i, j) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.
 \end{aligned}$$

Les matrices des transitions est de dimension infini

$$P_t = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2 & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t}(\lambda t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

3.2 Propriétés

Soit X un processus de Markov homogène sur E tel que $X_0 = x \in E$ et soit $T_x = \inf\{t \geq 0 ; X_t \neq x\}$ le temps de séjour du processus dans l'état $x \in E$.

Proposition 15. T_x est de loi exponentielle.

Proof. L'idée est de montrer que la loi de T_x du processus X est sans mémoire. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s, X_0 = x) &= \mathbb{P}(T_x > s + t | X_u = x, 0 \leq u \leq s) \\
 &= \mathbb{P}(X_u = x, 0 \leq u \leq s + t | X_u = x, 0 \leq u \leq s) \\
 &= \mathbb{P}(X_u = x, s \leq u \leq s + t | X_u = x, 0 \leq u \leq s) \\
 &= \mathbb{P}(X_u = x, s \leq u \leq s + t | X_s = x) \text{ (Propriété de Markov)} \\
 &= \mathbb{P}(X_u = x, 0 \leq u \leq t | X_0 = x) \text{ (Homogénéité dans le temps)} \\
 &= \mathbb{P}(T_x > t | X_0 = x).
 \end{aligned}$$

La seule distribution sur \mathbb{R}_+ vérifiant cette propriété est la loi exponentielle. \square

Supposons que $T_x \sim \text{Exp}(q_x)$,

- Si $q_x = 0$ alors le processus reste pour toujours dans l'état x qui est dit absorbant
- Si $q_x = \infty$ alors le processus quitte l'état x tout de suite après l'avoir atteint. Le processus peut alors effectuer un nombre de transition infini sur un intervalle de temps fini. Un tel processus est dit explosif.

Supposons que $q_x \in (0, \infty)$. La question est alors de savoir quel est l'état visité après l'état x . L'interprétation est la suivante:

- Le processus démarre dans l'état $x \in E$
- Soit $T_{x,y} \sim \text{Exp}[q(x,y)]$ pour $y \in E$ tel que $y \neq x$. Les paramètres $q(x,y)$ sont les taux de transitions. Si il est impossible d'aller de x à y directement alors $q(x,y) = 0$ et $T_{x,y} = \infty$.
- L'état visité après x est $y^* = \arg \min_{y \neq x} T_{x,y}$.
- La première alarme exponentielle qui sonne indique l'état d'arrivée du processus.
- On note que $T_x = \min_{y \neq x} T_{x,y} \sim \text{Exp}[\sum_{y \neq x} q(x,y)]$, ce qui implique que $q_x = \sum_{y \neq x} q(x,y)$
- La probabilité que l'alarme $T_{x,y}$ sonne la première est donnée par

$$p(x,y) = q(x,y)/q_x, \text{ pour } y \neq x,$$

ce qui fait le lien avec la chaîne de Markov $Z := (Z_n)_{n \geq 0}$ sous-jacente du processus de Markov X .

Soient T_1, T_2, \dots , les instants de saut de X et $Z := (Z_n)_{n \geq 0}$ le processus à temps discret tel que

$$Z_n = X_{T_n}, \quad n \geq 0.$$

On remarque que Z est une chaîne de Markov sur E de matrice des transition $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ où

$$p(x,y) = q(x,y)/q_x, \text{ pour } y \in E.$$

Le processus X s'écrit dès lors

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbb{1}_{T_n \leq t < T_{n+1}},$$

et Z est la chaîne dite immergée de X .

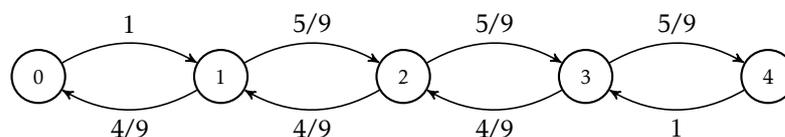
Exemple 17. Les étudiants doivent s'inscrire à l'université et une file d'attente se forme devant la scolarité. Le responsable de scolarité a besoin d'un temps aléatoire, de loi exponentielle, pour s'occuper de chaque étudiant avec en moyenne un temps de service de 5min. Les étudiants arrivent au bureau de la scolarité suivant un processus de Poisson au rythme de un étudiant toutes les 4 minutes. La file d'attente ne peut contenir plus de quatre étudiants, si un étudiant arrive alors que 4 étudiants sont déjà dans la file alors l'étudiant se décourage et fait demi tour. Il reviendra plus tard. L'étudiant en train de parler à la responsable de la scolarité fait parti de la file d'attente. Les temps d'arrivée des étudiants et les temps de service sont mutuellement indépendants.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le nombre d'étudiant dans la file au temps t . Il s'agit d'un processus de Markov sur l'espace d'état $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les paramètres des lois des temps de séjour dans chacun des états sont données par

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1/4 & 9/20 & 9/20 & 9/20 & 1/5 \end{array} \right)$$

Quelles sont les caractéristiques de $(Z_n)_{n \geq 0}$, la chaîne de Markov sous-jacente?

$(Z_n)_{n \geq 0}$ a pour espace d'état $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et graph des transitions



3.3 Le générateur infinitésimal

Eu égard aux équation de Chapman-Kolmogorov (c.f. Proposition 14), nous avons que

$$P_t = (P_{t/n})^n,$$

ainsi P_t est entièrement déterminé par son comportement sur un intervalle de temps infinitésimal.

Sa dérivée à droite est appelé générateur infinitésimal. On note que

$$p_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Theorem 14. Si X est un processus de Markov à saut, il existe une matrice Q telle que

1. $q(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, et

$$q(x, x) = - \sum_{y \neq x \in E} q(x, y)$$

2. Si $x \neq y$, $p_h(x, y) = hq(x, y) + o(h)$ et $p_h(x, x) = 1 + hq(x, x) + o(h)$

Proof. L'étude de $h \mapsto p_h(x, y)$ au voisinage de 0 est lié à la loi du couple (T_1, Z_1) , où T_1 est le premier instant de saut de X et $Z_1 = X_{T_1}$ l'état atteint après le saut. Pour un évènement A et $x \in E$, on note

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = x).$$

Lemma 4. Soit $h, t > 0$ et $m := m(h, t) \in \mathbb{N}$ tel que $mh \downarrow t$ lorsque $h \downarrow 0$. (par exemple $m = \lfloor t/h \rfloor + 1$). Alors pour $x \neq y$, on a les deux limites suivantes

$$\mathbb{P}_x(T_1 > t) = \lim_{h \downarrow 0} p_h(x, x)^m, \text{ et } \mathbb{P}_x(T_1 \leq t, Z_1 = y) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_h(x, x)^m}{1 - p_h(x, x)} p_h(x, y)$$

Proof. Tout évènement B satisfait

$$B \subset (B \cap \{T_2 - T_1 > h\}) \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}. \quad (3.1)$$

Nous avons l'inclusion suivante

$$\{T_1 > mh\} \subset B = \{X_0 = X_h = \dots = X_{mh}\} \subset \{T_1 > mh\} \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}.$$

La première inclusion est évidente. Pour la deuxième, on utilise (3.1). On note que pour $\omega \in B \cap \{T_2 - T_1 > h\}$, on ne peut avoir $T_1(\omega) \leq mh$ car sinon on aurait un saut pendant un intervalle de longueur inférieure à h^1 . On en déduit que $B \cap \{T_2 - T_1 > h\} \subset \{T_1 > mh\}$ Comme $\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}_x(T_2 - T_1 \leq h) = \mathbb{P}(T_2 = T_1) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_1 > t) &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}_x(T_1 > mh) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}_x(X_0 = X_h = \dots = X_{mh}) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} p_h(x, x)^m \end{aligned}$$

Pour la deuxième limite, on pose

$$A = \bigcup_{l=1}^m \{X_0 = X_h = \dots = X_{(l-1)h} = x, X_{lh} = y\}$$

On a les inclusions

$$A \subset \{X_0 = x, Z_1 = y, T_1 \leq mh\} \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}$$

et

$$\{X_0 = x, Z_1 = y, T_1 \leq mh\} \subset A \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}$$

¹Faire un schéma.

par le même raisonnement que précédemment. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(T_1 \leq t, Z_1 = y) &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}_x(T_1 \leq mh, Z_1 = y) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}_x(A) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{l=1}^m \mathbb{P}(X_0 = X_h = \dots = X_{(l-1)h} = s, X_{lh} = y) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{l=1}^m p_h(x, x)^{l-1} p_h(x, y) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_h(x, x)^m}{1 - p_h(x, x)} p_h(x, y)
\end{aligned}$$

□

En conservant les notations du lemme,

$$\ln \mathbb{P}_x(T_1 > t) = \lim_{h \downarrow 0} m \ln p_h(x, x) < 0.$$

Comme $\lim_{h \downarrow 0} p_h(x, x) = 1$ alors on a les équivalent suivant

$$\frac{\ln \mathbb{P}_x(T_1 > t)}{t} \sim \frac{hm \ln p_h(x, x)}{th} \sim \frac{\ln p_h(x, x)}{h} \sim \frac{p_h(x, x) - 1}{h}.$$

Le quotient $\frac{p_h(x, x) - 1}{h}$ a une limite noté $-q_x$ avec $q_x = -\frac{\ln \mathbb{P}_x(T_1 > t)}{t} \geq 0$. En posant $q(x, x) = -q_x$, on a bien le développement limité

$$p_h(x, x) = 1 + hq(x, x) + o(h).$$

D'après le [Lemma 4](#),

$$\mathbb{P}_x(T_1 \leq t, Z_1 = y) = \lim_{h \downarrow 0} h \frac{1 - p_h(x, x)^m}{1 - p_h(x, x)} \frac{p_h(x, y)}{h}.$$

On a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{1 - p_h(x, x)} = \frac{1}{q_x}$$

et

$$\lim_{h \downarrow 0} 1 - p_h(x, x)^m = \lim_{h \downarrow 0} 1 - e^{m \ln p_h(x, x)} = 1 - e^{\ln \mathbb{P}_x(T_1 > t)} = 1 - e^{-q_x t}.$$

On en déduit que $\frac{p_h(x, y)}{h}$ admet une limite pour $h \rightarrow 0$ que l'on note $q(x, y)$. On a donc

$$\mathbb{P}_x(T_1 \leq t, Z_1 = y) = \frac{(1 - e^{-q_x t})q(x, y)}{q_x}.$$

En sommant pour $y \neq x$, il vient

$$\mathbb{P}_x(T_1 \leq t) = \frac{(1 - e^{-q_x t}) \sum_{y \neq x} q(x, y)}{q_x}.$$

Comme $\mathbb{P}_x(T_1 > t) = e^{-q_x t}$ alors nécessairement $\sum_{y \neq x} q(x, y) = q_x = -q(x, x)$ ce qui complète la preuve. □

Exemple 18. 1. Le générateur infinitésimal associé à un processus de Poisson d'intensité λ est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Le graph des transitions est donné par la [Figure 3.1](#).

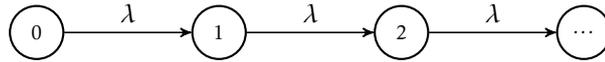


Figure 3.1: Graph des transitions pour le processus de Poisson.

2. Le générateur de la file d'attente vu dans l'[Exemple 17](#) est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & -9/20 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -9/20 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & -9/20 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Le graph des transitions est donné par la [Figure 3.1](#).

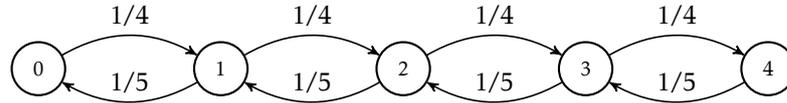


Figure 3.2: Graph des transitions pour le processus d'inscription à l'université.

Proposition 16. Soit un processus de Markov X de générateur infinitésimal Q et de matrice des transitions $(P_t)_{t \geq 0}$. Alors on a

- L'équation progressive ou forward

$$P'_t = P_t Q.$$

- L'équation rétrograde ou backward

$$P'_t = Q P_t.$$

Proof. Il s'agit d'une conséquence des équation de Chapman-Kolmogorov et du [Theorem 14](#).

Pour l'équation progressive, avec $h, t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{P_{t+h} - P_t}{h} &= \frac{P_t P_h - P_t}{h} \\ &= P_t \left(\frac{P_h - I}{h} \right) \\ &= P_t \left(\frac{P_h - P_0}{h} \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $h \rightarrow 0$, il vient $P_t' = P_t Q$. □

Exemple 19 (Processus à deux états). Soit un processus de Markov X sur $E = \{1, 2\}$ caractérisé par son générateur infinitésimal

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice des transitions P_t revient à résoudre un système d'équation différentielle. On a par exemple

$$\begin{aligned} p_t(1, 1)' &= -\lambda p_t(1, 1) + \mu[1 - p_t(1, 1)] \\ &= \mu - (\lambda + \mu)p_t(1, 1) \end{aligned}$$

Avec la condition $p_0(1, 1) = 1$, on a

$$p_t(1, 1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

On peut effectuer les mêmes calculs pour $p_t(1, 2)$, $p_t(2, 1)$ et $p_t(2, 2)$. On obtient finalement

$$P_t = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, le lien entre la matrice des transitions P_t et le générateur Q s'exprime au moyen l'opérateur exponentiel pour les matrice.

Proposition 17. On a

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}.$$

On rappelle que l'opérateur exponentiel pour les matrices vérifie les propriétés suivantes:

1. $e^0 = I$
2. $e^A e^{-A} = I$
3. $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$
4. Si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
5. $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$

pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $s, t \geq 0$. On peut facilement calculer l'exponentielle d'une matrice en python, à la main il faut diagonaliser la matrice Q (sous réserve que celle ci soit diagonalisable).

Exemple 20. On reprend l'Exemple 19. La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Elle admet pour valeur propre 0 et $-(\lambda + \mu)$, les vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} -\lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

On obtient la décomposition

$$Q = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu/(\lambda + \mu) & \lambda/(\lambda + \mu) \\ -1/(\lambda + \mu) & 1/(\lambda + \mu) \end{pmatrix}.$$

Cela permet d'exprimer la matrice des transition par

$$\begin{aligned} P_t &= e^{tQ} \\ &= Se^{tD}S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu/(\lambda + \mu) & \lambda/(\lambda + \mu) \\ -1/(\lambda + \mu) & 1/(\lambda + \mu) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Comportement asymptotique

Le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov en temps continu est similaire à celui d'une chaîne de Markov en temps discret. Si la chaîne de Markov possède les propriétés d'irréductibilité et de récurrence alors il existe une unique loi invariante qui jouera le rôle de loi stationnaire. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov sur E de générateur Q et de matrice des transition $t \mapsto P_t$.

Definition 32. Une loi de probabilité $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$ sur E est la loi stationnaire de X si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x, y) = \pi(y)$$

La loi stationnaire est toujours une loi invariante de X

Definition 33. Une loi de probabilité $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$ sur E est une loi invariante de X si

$$\pi = \pi P_t, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

De plus, on a également

$$\pi Q = 0.$$

NB: π est un vecteur ligne de dimension $\text{Card}(E)$.

Si $\pi P_t = \pi$ alors $0 = \pi P_t' = \pi Q$. Inversement si $\pi Q = 0$ alors $\pi Q P_t = 0$, puis $\pi P_t' = 0$. On en déduit que $\pi P_t = \text{Cste} = \pi P_0 = \pi I = \pi$.

Theorem 15. Si X est un processus de Markov irréductible sur un espace d'état fini alors il existe une unique loi invariante qui est aussi la loi stationnaire.

Example 21. On reprend le processus des exemples 19 et 20. On note que $\pi = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$ vérifie

$$\pi Q = 0, \text{ et } \pi^t \mathbf{1}_2 = 1,$$

où $\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, et que

$$P_t = \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu/(\lambda + \mu) & \lambda/(\lambda + \mu) \\ \mu/(\lambda + \mu) & \lambda/(\lambda + \mu) \end{pmatrix} \text{ pour } t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

La loi stationnaire s'interprète comme le temps moyen passé dans chaque état par le processus X dans le cadre d'une trajectoire de longueur infini. Lorsque l'espace d'état est infini alors l'étude du comportement asymptotique nécessite d'introduire la notion d'état récurrent et transitoire. On note

$$R_x = \inf\{t > T_1 ; X_t = x\}$$

le temps de premier retour à l'état x (sous entendu $X_0 = x$).

Definition 34. Un état $x \in E$

- est récurrent si

$$\mathbb{P}_x(R_x < \infty) = 1,$$

de plus x est

- récurrent positif si $\mathbb{E}_x(R_x) < \infty$
- récurrent nul si $\mathbb{E}_x(R_x) = \infty$

- est transitoire si

$$\mathbb{P}_x(R_x = \infty) > 0.$$

Theorem 16. La loi stationnaire de X existe et est unique si X est irréductible et que tous les états sont récurrents positifs.

Proof. admis □

Remark 13. Ces notions sont aussi valables pour les chaînes de Markov en temps discret. Si les propriétés de récurrence sont vérifiées pour la chaîne de Markov immergé

$$Z_n = X_{T_n}, \quad n \geq 0,$$

où les T_n sont les instants de saut, alors elles sont vérifiées pour le processus X et vice-versa. Ces notions sont abordées dans mes notes de cours sur les chaînes de Markov <http://pierre-olivier.goffard.me/mad/>.

Si l'espace d'état est infini, il est hors de question de résoudre un système linéaire. Il est plus facile de trouver une loi réversible

Definition 35. Une loi λ sur E est dite réversible si elle vérifie

$$\lambda(x)q(x,y) = \lambda(y)q(y,x), \text{ pour tout } (x,y) \in E.$$

Proposition 18. Soit λ une loi sur E , alors

$$\lambda \text{ réversible} \Rightarrow \lambda \text{ invariante.}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lambda Q &= \left(\sum_{x \in E} \lambda(x)q(x,y_1) \quad \sum_{x \in E} \lambda(x)q(x,y_2) \quad \dots \right) \\ &= \left(\sum_{x \in E} \lambda(y_1)q(y_1,x) \quad \sum_{x \in E} \lambda(y_2)q(y_2,x) \quad \dots \right) \\ &= \left(0 \quad 0 \quad \dots \right). \end{aligned}$$

□

Remark 14. Si X admet une loi stationnaire réversible alors le processus est réversible dans le temps. Sur le long terme, on ne fait pas la différence entre les processus X_t et X_{T-t} .

3.5 Processus de naissance-mort

Les processus de naissance-mort sont des processus de Markov $X = (X_t)_{t \geq 0}$ tels que

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Example 22. Le processus de Poisson est un processus de naissance dont les taux de naissance sont constants, égaux à l'intensité de processus.

Pour étudier la loi stationnaire du processus de naissance-mort, on recherche une loi π réversible. Elle vérifie

$$\pi(x)\lambda_x = \pi(x+1)\mu_{x+1}, \text{ pour tout } x \geq 0.$$

On en déduit que

$$\pi(x) = \pi(0) \prod_{k=1}^x \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

On en déduit l'existence d'une loi réversible si

$$S = \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{k=1}^x \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty,$$

auquel cas

$$\pi(0) = (1 + S)^{-1}.$$

L'unicité est plus difficile à montrer. Voyons un exemple en théorie des files d'attente.

3.6 Théorie des files d'attente et loi de Little

Soit un système comprenant des clients et des serveurs, caractérisé par trois paramètres

1. La fréquence d'arrivée des clients
2. Le temps de service par un serveur
3. le nombre de serveurs

On définit un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui modélise le nombre de client dans le système. En supposant que le processus converge vers une loi stationnaire alors on a la relation suivante (merci à [Little \[1961\]](#)).

Theorem 17.

$$L = \lambda W,$$

avec

- L le nombre de clients moyen dans le système lorsque $t \rightarrow \infty$
- λ le nombre moyen de client qui arrive par unité de temps
- W le temps moyen d'attente d'un client dans le système lorsque $t \rightarrow \infty$

Proof. Il s'agit plus d'une intuition qu'une preuve rigoureuse (voir [Little \[1961\]](#) pour la preuve). Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ le processus qui compte le nombre de client entrés dans le système. Soit T_1, \dots, T_{N_t} les temps d'arrivée des clients. On note S_1, \dots, S_{N_t} les temps de sortie du système des clients. On considère une trajectoire du processus X entre $[0, t]$ tel que $S_{N_t} = t$ et $T_{N_t+1} > t$. Un exemple d'une telle trajectoire est donnée par la [Figure 3.3](#). La preuve consiste à calculer l'aire sous la

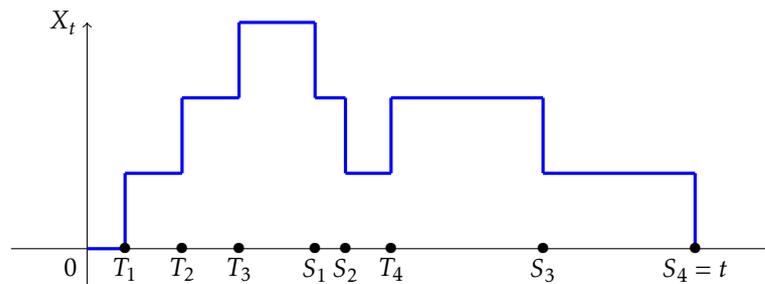


Figure 3.3: Trajectoire du processus X_t tel que $N_t = 4$.

courbe A de deux façons. On a d'une part,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (S_i - T_i) \\ &= \frac{(S_1 - T_1) + (S_2 - T_2) + (S_3 - T_3) - (S_4 - T_4)}{4} \\ &= \frac{(S_4 - T_1) + (S_3 - T_4) + (S_2 - T_2) + (S_1 - T_3)}{4} \\ &= \frac{A}{N_t}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{t} \int_0^t X_s ds \\ &= \frac{1 \cdot (T_2 - T_1) + 2 \cdot (T_3 - T_2) + 3 \cdot (T_3 - S_1) + 2 \cdot (S_1 - S_2) + 1 \cdot (S_2 - T_4) + 2 \cdot (T_4 - S_3) - 1 \cdot (S_4 - S_3)}{t} \\ &= \frac{A}{t}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$L = \frac{N_t}{t} W \rightarrow L = \lambda W.$$

□

Cette loi est très utile en pratique car on a parfois accès à W facilement mais pas à L ou inversement. On répond alors à des questions du type

- Quel est la longueur moyenne de la file d'attente?
- Si je vais au magasin, quel est mon temps d'attente moyen avant que le service commence?
- Quel est le temps moyen passé par un client dans le système?

Exemple 23 (file d'attente M/M/1 queue). *Supposons que le nombre de client arrivant dans le système est gouverné par un processus de Poisson d'intensité λ . Supposons ces unités sont servis par un unique serveur et que le temps de service soit une loi exponentielle de paramètre μ . Le nombre de client dans le système est modélisé par un processus X . Ce processus est une file d'attente du type M/M/1 où M signifie memoryless. Le générateur du processus est donnée par*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un processus de naissance mort dont les taux de naissance et de mort sont constants. La loi stationnaire existe si

$$S = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x < \infty,$$

cela équivaut à $\lambda < \mu$ avec

$$S = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{1}{1 - \lambda/\mu} \right).$$

On en déduit la loi stationnaire du processus

$$\pi(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x, \text{ pour } x \geq 0.$$

Il s'agit d'une loi géométrique de paramètre $1 - \lambda/\mu$. Le nombre moyen de clients dans le système est donc

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

On en déduit le temps moyen passé dans le système via la loi de Little avec

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

On peut considérer que la file d'attente comprend tous les clients du système sauf celui en train d'être servi. Le temps moyen passé W_q dans la file d'attente est donné par

$$W_q = W - W_s,$$

où W_s est le temps de service moyen. Il vient

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

La longueur moyenne L_q de la file d'attente peut être déterminée par la loi de Little en restreignant le système à la file d'attente. Il vient

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

De manière générale, un processus de type file d'attente atteint la stationnarité lorsque les sorties du système dominent les entrées.

3.7 Chaîne de Markov subordonnée à un processus de Poisson

Soit $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice des transitions A sur un espace d'état E . On peut construire un processus de Markov à partir de Y et d'un processus de Poisson $N = (N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ , indépendant de Y .

Proposition 19. Le processus défini par

$$X_t = Y_{N_t}, \quad t \geq 0,$$

est un processus de Markov de matrice des transitions données par

$$P_t = \exp[\lambda t(A - I)].$$

Proof. Soit $x, y \in E$

$$\begin{aligned} p_t(x, y) &= \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x, N_t = k) \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k = y | Y_0 = x) \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{x,y}^k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que c'est bien équivalent à (3.2). En effet,

$$\begin{aligned}
 \exp[\lambda t(A - I)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (A - I)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l (-1)^{k-l} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(\lambda t)^k}{l!(k-l)!} A^l (-1)^{k-l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{l!(k-l)!} A^l (-1)^{k-l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-l)!} (-1)^{k-l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} A^l \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t}
 \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve on vérifie que pour $0 = t_0 < t_1 < \dots, t_n$ des instants et x_0, x_1, \dots, x_n des états de E , on a

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P_{t_1}(x_0, x_1) \dots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n).$$

Il faut conditionner par rapport au valeur du processus N aux temps t_1, \dots, t_n et c'est un peu fastidieux à écrire. \square

On peut identifier le générateur de X par

$$Q = \lambda(A - I).$$

Inversement à partir d'un processus de Markov X dont les temps de séjour sont bornées, $q_x < \lambda$ pour tout $x \in E$, on observe que

$$A = \frac{Q}{\lambda} + I$$

est une matrice stochastique². Il ne faut toutefois pas confondre la chaîne Y de matrice des transition A avec la chaîne immergée Z définie plus haut!

3.8 Loi *phase-type*

Soit une processus de Markov $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sur un espace d'état $E \cup \{\dagger\}$ comprenant un état absorbant caractérisés par un temps de séjour infini, soit

$$q_{\dagger} = 0.$$

Le générateur de X s'écrit alors par bloc avec

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} T & t \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

²Tous les coefficients sont positifs et les lignes se somment à 1.

où t et T sont respectivement des vecteur et matrice carré de dimension $\text{Card}(E)$, tel que $t + T\mathbf{1}_E = 0$, où $\mathbf{1}_E$ est un vecteur ne contenant que des 1. Le vecteur t correspond aux taux de transition vers l'état absorbant (les taux d'absorbtion) depuis chacun des état de E . Le temps d'absorbtion

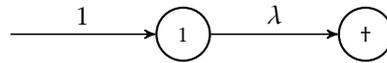
$$\tau = \inf\{t \geq 0 ; X_t = \dagger\},$$

suit une loi *phase-type*, noté $\text{PH}(\alpha, T)$, où α est la loi initiale de X . Les lois *phase type* sont denses dans les lois de probabilité sur \mathbb{R}_+ ³. De nombreuses lois usuelles sont des cas particuliers de loi *phase-type*.

Exemple 24. 1. La loi $\text{Exp}(\lambda)$ est une loi *phase-type*, avec

$$\alpha = (1 \quad 0), Q = \left(\begin{array}{c|c} -\lambda & \lambda \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Schématiquement,



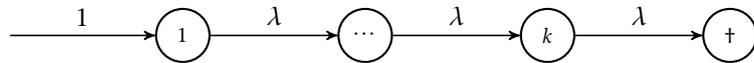
2. La loi $\text{Gamma}(k, \lambda)$, avec $k \in \mathbb{N}$, de densité

$$f(t) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^k t^{k-1}}{k!}, \text{ pour } t > 0,$$

est une loi *phase-type*, avec

$$\alpha = (1 \quad \dots \quad 0), Q = \left(\begin{array}{cccc|c} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Schématiquement,



3. La loi $h\text{-Exp}(p, \lambda_1, \lambda_2)$, de densité

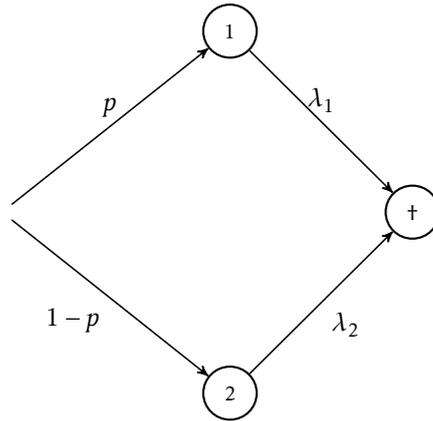
$$f(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \text{ pour } t > 0.$$

est une loi *phase-type*, avec

$$\alpha = (p \quad 1-p), Q = \left(\begin{array}{c|c} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ \hline 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Schématiquement,

³N'importe loi sur \mathbb{R}_+ peut s'écrire comme la limite d'une suite de loi *phase type*.



Ces distributions donnent une grande marche de manoeuvre à la modélisation. Leur représentation sous la forme de graph rend commode l'explication du modèle. On retrouve les lois *phase type* dans de nombreux domaines d'application des probabilités.

Theorem 18. Soit X une v.a. de loi $PH(\alpha, T)$, alors

1. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = 1 - \alpha e^{Tx} \mathbf{1}_E$$

2. La densité de X est donnée par

$$f(x) = \alpha e^{Tx} t$$

3. L'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = -\alpha T^{-1} \mathbf{1}_E$$

4. La fonction génératrice des moments X est donnée par

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X}) = \alpha(-\theta I - T)^{-1} t$$

Proof. Voir [Asmussen and Albrecher \[2010, Chapitre 9, Section 1\]](#) □

En actuariat, les lois *phase-type* sont utilisées pour

- modéliser les montants de sinistres et le temps entre les sinistres, voir [Bladt \[2005\]](#), voir également la généralisation de [Albrecher and Bladt \[2019\]](#) pour permettre des distributions à queue lourdes
- modéliser la mortalité, voir [Lin and Liu \[2007\]](#)
- modéliser l'entrée et le maintien en incapacité, voir [Zadeh et al. \[2013\]](#)
- valoriser des contrats de type épargne, voir [Asmussen et al. \[2019\]](#)
- tarifier via la théorie de la crédibilité, voir [Zadeh and Stanford \[2014\]](#)

L'estimation se fait par maximum de vraisemblance au moyen d'un algorithme d'espérance-maximisation (EM), voir [Asmussen et al. \[1996\]](#).

Exemple 25. Le maintien en incapacité joue un rôle prépondérant en assurance emprunteur, et en prévoyance individuel. Les assurés ont généralement trois statuts

{actif, incapable, décédé}

qui peuvent former l'espace d'état E d'un processus de Markov X dont l'état absorbant est $\dagger = \text{décédé}$ et des aller-retours entre les états actif et incapable, comme sur la Figure 3.4 Le modèle se complexifie en

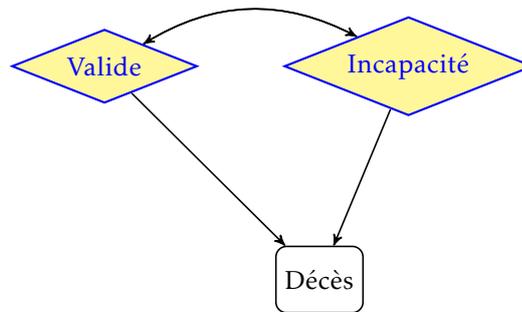


Figure 3.4: Les états des assurés dans le cadre de la modélisation du maintien en incapacité

distinguant les différentes classes d'âge $j = 1 \dots, l$ associées à des taux d'entrée en incapacité distincts

$$\beta_1, \dots, \beta_l,$$

des taux de retour à l'activité distincts

$$\gamma_1, \dots, \gamma_l,$$

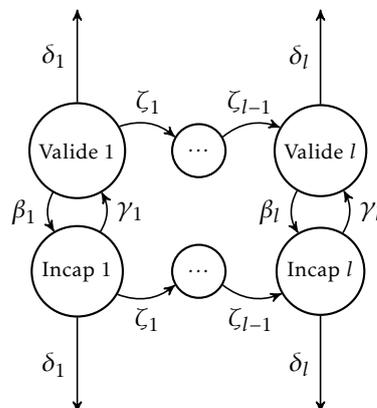
des taux de transitions de classes

$$\zeta_1, \dots, \zeta_{l-1},$$

et finalement des taux de décès distincts

$$\delta_1, \dots, \delta_l.$$

Le modèle complet est donnée par le graph suivant: Il ne reste plus qu'à construire la matrice T :).



Bibliography

- Hansjörg Albrecher and Mogens Bladt. Inhomogeneous phase-type distributions and heavy tails. *Journal of Applied Probability*, 56(4):1044–1064, dec 2019. doi: 10.1017/jpr.2019.60.
- Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher. *Ruin Probabilities*. WORLD SCIENTIFIC, sep 2010. doi: 10.1142/7431.
- Søren Asmussen, Patrick Laub, and Hailiang Yang. Phase-type models in life insurance: fitting and valuation of equity-linked benefits. *Risks*, 7(1):17, feb 2019. doi: 10.3390/risks7010017.
- Søren Asmussen, Olle Nerman, and Marita Olsson. Fitting phase-type distributions via the em algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics*, 23(4):419–441, 1996. ISSN 03036898, 14679469. URL <http://www.jstor.org/stable/4616418>.
- Mogens Bladt. A review on phase-type distributions and their use in risk theory. *ASTIN Bulletin*, 35(1):145–161, may 2005. doi: 10.1017/s0515036100014100.
- Robert P. Dobrow. *Introduction to Stochastic Processes With R*. John Wiley & Sons, Inc, mar 2016. doi: 10.1002/9781118740712.
- X. Sheldon Lin and Xiaoming Liu. Markov aging process and phase-type law of mortality. *North American Actuarial Journal*, 11(4):92–109, oct 2007. doi: 10.1080/10920277.2007.10597486.
- John D. C. Little. A proof for the queuing formula: $L = \lambda W$. *Operations Research*, 9(3):383–387, jun 1961. doi: 10.1287/opre.9.3.383.
- Lionel Truquet. Statistiques des processus 3a. Lecture notes, 2015. <https://ensai.fr/wp-content/uploads/2019/06/polystatdesprocessus2.pdf>.
- Amin Hassan Zadeh and David A. Stanford. Bayesian and bühlmann credibility for phase-type distributions with a univariate risk parameter. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4): 338–355, jun 2014. doi: 10.1080/03461238.2014.926977.
- Amin Hassan Zadeh, Bruce L. Jones, and David A. Stanford. The use of phase-type models for disability insurance calculations. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014(8):714–728, mar 2013. doi: 10.1080/03461238.2012.761645.

Chapter 4

Mouvement brownien

Le contenu de ce chapitre s'inspire de l'ouvrage de [Dobrow \[2016\]](#) et des notes de cours de [Jeanblanc \[2006\]](#).

4.1 Un peu d'histoire

1827 Le botaniste écossais Robert Brown (1773-1858) en immergeant dans un liquide au repos des grains de pollen de la *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nordaméricaine d'environ 100 microns) remarqua un comportement désordonné. Il observa au microscope de minuscules particules de quelques micromètres décrivant à la surface du liquide des trajectoires apparemment erratiques. Il utilisa les grains de pollen car ils contenaient des particules oblongues ayant une forme allongée plus longue que large. Brown était particulièrement passionné par les pollens et il croyait pouvoir suivre leur progression durant la fertilisation. Il pensait que ce mouvement était causé par un fluide vital provenant de l'intérieur des grains de pollen. En apprenant qu'Ingenkousz avait observé le même comportement pour la poussière de charbon, Brown renonça à son hypothèse du fluide vital et il réussit à montrer que ce mouvement chaotique se produisait également avec des grains de matière inerte. En 1828, Brown publia ses résultats dans un article² de la revue *The Edinburgh Journal of Science*.

1877 ELe physicien Joseph Delsaux (1828-1891) et le mathématicien Père Jésuite Ignace Carbone (1829-1889) ont émis l'hypothèse selon laquelle les changements continus de direction de trajectoires qui donnent lieu au mouvement aléatoire et erratique des grains de pollen, sont dus aux chocs incessants entre les particules de pollen et les innombrables molécules d'eau qui sont comparativement beaucoup plus petites que les grains de pollen. Par conséquent, les petites particules contenues dans les grains de pollen de la *Clarkia pulchella* se déplaceraient de façon erratique, car elles seraient heurtées ou bombardées par des entités invisibles nommément, les molécules d'eau dans lesquelles elles sont immergées. Comme ces molécules sont soumises en permanence à une agitation thermique,

les particules se déplacent nécessairement les unes par rapport aux autres.

1900 Louis Bachelier soutient à la Sorbonne sa thèse de doctorat intitulée « Théorie de la spéculation » rédigée sous la direction du célèbre mathématicien Henri Poincaré. Dans cette thèse, Bachelier utilise l'idée du mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse de Paris. Sa thèse contenait, entre autres, cette idée de lier les fluctuations boursières à l'équation de la chaleur. Cette thèse fut le début de la finance moderne et le point de départ de la théorie des produits dérivés qui s'appelaient à l'époque produits à prime. De nos jours, le mouvement brownien est omniprésent dans le modèle de Black-Scholes pour calculer la valeur théorique de certains contrats d'option, en utilisant les cours boursiers actuels, les dividendes attendus, le prix d'exercice de l'option, les taux d'intérêt, le délai d'expiration et la volatilité.

1905 Albert Einstein a donné une description quantitative du mouvement brownien et a modélisé pour la première fois le mouvement des particules dans un liquide soumises à des interactions aléatoires. Son article de 1905 étudie la probabilité qu'une particule se trouve en un endroit donné en un instant t . Cet article marque la naissance de la physique statistique.

1. Le mouvement de chaque particule est indépendant des mouvements des autres particules.
2. Les mouvements d'une même particule pendant deux intervalles de temps disjoints sont indépendants.
3. le mouvement des particules en interaction suit une loi normale en vertu du théorème de la limite centrale (grand nombre de particule).
4. La trajectoire de toute particule de pollen est continue

1923 En 1923, Norbert Wiener est le premier à développer rigoureusement les bases mathématiques du mouvement brownien, en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles.

1948 Paul Lévy est une figure marquante dans le développement du mouvement brownien. Il publie en 1948 un livre intitulé « Processus stochastiques et mouvement brownien », et obtient alors de nombreux résultats qui portent son nom. En fait, il donne les conditions nécessaires et suffisantes pour définir le mouvement brownien.

Il introduit une première forme des équations différentielles stochastiques dont l'étude sera réalisée de façon systématique par Kiyoshi Itô, le fondateur du calcul stochastique nommé aussi le calcul d'Itô.

J'ai repris ses éléments du blogpost qui s'intitule [Le mouvement brownien: du pollen à l'origine de la finance moderne](#)

4.2 Définition

Le mouvement Brownien est un processus en temps continu à valeur dans \mathbb{R} .

Definition 36. Le processus $B := (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien si

1. $B_0 = 0$
2. $B_{t+s} - B_s \sim \text{Normal}(0, t)$ (Accroissement stationnaire)
3. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ pour $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sont indépendants (Accroissement indépendant)
4. $t \mapsto B_t$ est continu presque sûrement, c'est à dire

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega ; t \mapsto B_t(\omega) \text{ est continu}) = 1.$$

Il découle de la définition que le mouvement Brownien est un processus de Lévy. La contribution de N. Wiener a consisté à montrer l'existence d'un tel processus. Pour une preuve on pourra se référer à Gall [2012, Chapitre 2]. Les propriétés d'accroissement indépendants et stationnaires fournissent une méthode de simulation des trajectoires du mouvement Brownien à l'aide d'une marche aléatoire sur \mathbb{R} . En effet soient des instants

$$t_i = \frac{it}{n}, \text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

et $t > 0$ un horizon de temps. On a

$$B_{t_{i+1}} = B_{t_i} + (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \stackrel{D}{=} B_{t_i} + \xi_{i+1},$$

où $\xi_{i+1} \sim \text{Normal}(0, t/n)$. Pour $\omega \in \Omega$ la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu mais elle n'est différentiable en aucun point. En effet, on note que

$$\frac{dB_t}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \text{Normal}(0, 1/h)$$

4.2.1 Le principe d'invariance et le lien avec la marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Le mouvement Brownien est en fait la limite de n'importe quel marche aléatoire

$$Z_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 0.$$

dont les incréments ξ_1, \dots, ξ_n sont i.i.d. de moyenne 0 et de variance 1. Soit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ issu d'une interpolation linéaire

$$X_t = \begin{cases} Z_t, & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ Z_{\lfloor t \rfloor} + \xi_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$X_{nt}/\sqrt{n} \xrightarrow{D} B_t \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Il s'agit d'une normalisation du processus dans le temps et l'espace. C'est le principe d'invariance de Donsker [1951], on parle aussi de théorème centrale limite fonctionnel.

Exemple 26. Considérons la marche aléatoire $Z_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ sur \mathbb{Z} avec

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\xi = -1) = 1/2.$$

On a bien $\mathbb{E}(\xi) = 0$ et $\mathbb{V}(\xi) = 1$. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$X_t = \begin{cases} Z_t, & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ Z_{\lfloor t \rfloor} + \xi_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor), & \text{sinon.} \end{cases}$$

La version normalisée du processus

$$X_t^{(n)} = \frac{X_{tn}}{\sqrt{n}},$$

comprend n fois plus de saut sur $[0, t]$. La taille est réduite d'un facteur $1/\sqrt{n}$. On vérifie que

$$\mathbb{E}(X_t^{(n)}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t^{(n)}) &= \mathbb{V}\left(\frac{X_{tn}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{\mathbb{V}(Z_{\lfloor tn \rfloor})}{n} + \frac{\mathbb{V}(\xi_{\lfloor tn \rfloor + 1})}{n}(tn - \lfloor tn \rfloor)^2 \\ &= \frac{\lfloor tn \rfloor}{n} + \frac{1}{n}(tn - \lfloor tn \rfloor)^2 \rightarrow t \text{ pour } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

L'application du théorème centrale limite permet de montrer que

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0, t), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

La propriété de Markov forte de la marche aléatoire permet d'établir l'indépendance des incréments du processus $X_t^{(n)}$.

4.2.2 Le mouvement Brownien en tant que processus gaussien

Définition 37. Un vecteur aléatoire $X = (X_1 \dots X_p)$ suit une loi normale multivariée si $\sum_{i=1}^p a_i X_i$ suit une loi normale pour tout $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$. La densité jointe de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)\right),$$

où

$$\mu = \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_p))$$

est le vecteur de moyenne et

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, p,$$

est la matrice de variance covariance. On note

$$X \sim M\text{-Normal}(\mu, \Sigma)$$

Remark 15. Pour simuler un vecteur

$$X = (X_1 \dots X_n) \sim M\text{-Normal}(\mu, \Sigma)$$

On procède en trois étapes

1. Trouver une matrice A telle que $A^t A = \Sigma$ (via une décomposition de Cholesky¹, par exemple). Σ est une matrice symétrique semi-définie positive.
2. Simuler $Z_1, \dots, Z_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$
3. Poser $X = \mu + AZ$, on peut vérifier que la matrice de variance-covariance est bien Σ ²

Example 27. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $s < t$, on a

$$(B_s, B_t) \sim M\text{-Normal}(\mu, \Sigma),$$

où $\mu = (0 \ 0)$ et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

En effet, soit $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mesurables et bornée, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_1(B_s)\phi_2(B_t)] &= \mathbb{E}[\phi_1(B_s)\phi_2(B_t - B_s + B_s)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_1(u)\phi_2(v+u) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{u^2}{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{v^2}{2(t-s)}} d\lambda(u, v) \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable

$$\varphi : (u, v) \mapsto (u, v + u) = (x, y).$$

Le Jacobien³ est donnée par

$$\det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

On obtient donc par la formule de changement de variable

$$\mathbb{E}[\phi_1(B_s)\phi_2(B_t)] = \int \phi_1(x)\phi_2(y) \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} d\lambda(x, y).$$

On reconnaît dans l'intégrale la densité gaussienne multivariée avec vecteur de moyenne identiquement nul et fonction de variance covariance Σ . On en déduit que

$$f_{B_s|B_t}(x|y) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi s(t-s)}} e^{-\frac{t(x-ys/t)^2}{2s(t-s)}}$$

puis

$$B_s|B_t = y \sim \text{Normal}\left(\frac{s}{t}y, \frac{s(t-s)}{t}\right).$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Cholesky_decomposition

²Il faut utiliser les propriétés de la covariance entre deux vecteurs aléatoires, voir par exemple <https://en.wikipedia.org/wiki/Covariance>

³déterminant de la matrice Jacobienne qui est une matrice contenant les dérivées partielles d'ordre 1 de la transformation φ .

Le mouvement Brownien est un cas particulier de processus gaussien.

Definition 38. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ le vecteur

$$(X_{t_1} \dots X_{t_n})$$

suit une loi normale multivariée. Le processus gaussien est caractérisé par

- sa fonction de moyenne

$$t \mapsto m(t) = E(X_t)$$

- sa fonction de covariance

$$(s, t) \mapsto C(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$$

Proposition 20. Il y a équivalence entre les assertions suivantes

(i) Le processus $B := (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien

(ii) Le processus $B := (B_t)_{t \geq 0}$, tel que $B_0 = 0$, est un processus gaussien de fonction de moyenne $m(t) = 0$ et de fonction de covariance $C(s, t) = s \wedge t$ pour tout $s, t \geq 0$.

Proof. (i) \Rightarrow (ii)

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Considérons des instants $t_1 < \dots < t_n$ et a_1, \dots, a_n des constantes. On note que

$$a_1 B_{t_1} + \dots + a_n B_{t_n} = (a_1 + \dots + a_n) B_{t_1} + (a_2 + \dots + a_n)(B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + (a_{n-1} + a_n)(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}) + a_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

Les $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes donc leur combinaisons linéaires également. On note que

$$m(t) = \mathbb{E}(B_t) = 0$$

La fonction de covariance du mouvement brownien B est donnée par

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_s B_t)$$

pour $s, t > 0$. Supposons que $t > s$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_s B_t) &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s) + B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) + s \\ &= s \end{aligned}$$

Si $s < t$ alors $\mathbb{E}(B_s B_t) = t$ par symétrie. On en déduit que

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = t \wedge s.$$

(ii) \Rightarrow (i) Soit $B := (B_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien, tel que $B_0 = 0$, de fonction de moyenne $m(t) = 0$ et de fonction de covariance $C(s, t) = s \wedge t$ pour tout $s, t \geq 0$. Nous devons vérifier que ce processus est à accroissements stationnaires et indépendants. Comme B est un processus gaussien alors $B_{t+s} - B_t$ suit une loi normale de moyenne

$$\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) = \mathbb{E}(B_{t+s}) - \mathbb{E}(B_t) = 0$$

et de variance

$$\mathbb{V}(B_{t+s} - B_t) = \mathbb{V}(B_{t+s}) + \mathbb{V}(B_t) - 2\text{Cov}(B_{t+s}, B_t) = t + s + t - 2t = s$$

On en déduit que B_s et $B_{t+s} - B_t$ ont la même loi Normal(0, s). Le processus B est à accroissements stationnaires. Pour montrer que les accroissements sont indépendants, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas corrélés puisqu'ils sont gaussiens. On a par exemple, pour $0 \leq q < r < s < t$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t - B_s, B_r - B_q) &= \text{Cov}(B_t - B_s, B_r) - \text{Cov}(B_t - B_s, B_q) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_r) - \text{Cov}(B_s, B_r) - \text{Cov}(B_t, B_q) + \text{Cov}(B_s, B_q) \\ &= r - r - q + q = 0. \end{aligned}$$

La fonction de covariance est une forme bi-linéaire symétrique. □

La classe des processus Gaussiens est très large. Parmi les fonctions de variance-covariance classiques, on trouve

1. $C(s, t) = st$
2. $C(s, t) = \sigma^2 \mathbb{I}_{s=t}$
3. $C(s, t) = \exp\left(-\frac{(s-t)^2}{2l^2}\right), l > 0$
4. $C(s, t) = \exp\left(-2\frac{\sin^2(\pi(s-t)/2)}{l^2}\right), l > 0$

Ces fonctions mènent à des processus très variés.

Remark 16. Les processus gaussiens sont des outils très utiles en apprentissage statistique. On trouve également des applications en actuariat

- Pour prédire des taux de mortalité voir [Huynh and Ludkovski \[2021\]](#) et [Wu and Wang \[2018\]](#),
- Pour le provisionnement voir [Ludkovski and Zail \[2022\]](#).

Pour des explications sur la regression par processus gaussien, voir <https://arxiv.org/html/2009.10862v5>

4.3 Propriétés

4.3.1 Transformation du mouvement brownien

Proposition 21. Si B est un mouvement brownien alors les processus définis par

1. $-B_t$
2. $\frac{B_c^2 t}{c}$, pour $c \neq 0$,
3. $tB_{1/t}$, pour $t > 0$,
4. $B_{t+s} - B_s$ pour tout $s \geq 0$,

sont aussi des mouvements browniens.

Proof. Ces processus sont des processus gaussiens, il suffit alors de vérifier que la fonction de moyenne et de covariance vérifient respectivement

$$m(t) = 0, \text{ et } C(s, t) = s \wedge t, \text{ pour } s, t \geq 0.$$

□

4.3.2 Propriétés de Markov

Le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov homogène sur un espace d'état continu.

Proposition 22. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de $(B_t)_{t \geq 0}$. Pour $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction mesurable et bornée et $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[g(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[g(B_{t+s})|B_s] = \int g(y)K_t(B_s, y)dy,$$

où

$$K_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right],$$

est le noyau de transition du mouvement brownien. Il s'agit en fait de la densité conditionnelle de B_{t+s} sachant $B_s = x$.

Proof. Soit Z une v.a. \mathcal{F}_s -mesurable, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(B_{t+s})|\mathcal{F}_s]Z\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(B_{t+s} - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s]Z\} \\ &= \mathbb{E}[g(B_{t+s} - B_s + B_s)Z] \\ &= \int g(x+y)z f_{B_{t+s}-B_s, B_s, Z}(x, y, z) d\lambda(x, y, z) \\ &= \int z \left(\int g(x+y) f_{B_{t+s}-B_s}(x) d\lambda(x) \right) f_{B_s, Z}(y, z) d\lambda(y, z) \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int g(x+B_s) f_{B_{t+s}-B_s}(x) d\lambda(x) \right) Z \right] \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] &= \int g(x+B_s) f_{B_{t+s}-B_s}(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x+B_s) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-B_s)^2}{2t}\right] dy \end{aligned}$$

On peut effectuer le même raisonnement pour $\mathbb{E}[g(B_{t+s})|B_s]$. □

On utilise dans la preuve précédente la définition formelle de l'espérance conditionnelle. Il s'agit d'une application direct d'un résultat sur l'espérance conditionnelle, voir [Le Gall \[2006, Theorem 11.3.4\]](#).

Theorem 19. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration et τ un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt tel que $\{\tau < \infty\}$ presque sûrement. Le processus

$$B_t^{(\tau)} = B_{t+\tau} - B_\tau$$

est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_τ .

Proof. La preuve est un peu plus technique que pour la propriété de Markov simple, voir [Gall \[2012, Theorem 2.3\]](#). □

On peut utiliser la propriété de Markov forte pour déterminer la loi du temps d'atteinte du niveau > 0 défini par

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 ; B_t = a\}.$$

Remark 17. Le temps d'arrêt τ_a est fini presque sûrement au même titre qu'une marche aléatoire équilibré est récurrente. Pour une preuve de ce fait voir [Gall \[2012, Corollaire 2.3\]](#).

Proposition 23. La densité de τ_a est donnée par

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t}, \text{ pour } t > 0.$$

Proof. Par la propriété de Markov forte le processus $B_{t+\tau_a} - a$ est un mouvement brownien. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t > a | \tau_a < t) &= \mathbb{P}(B_t - B_{\tau_a} > 0 | \tau_a < t) \\ &= \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_t - B_{\tau_a} > 0} \mathbb{I}_{\tau_a < t})}{\mathbb{P}(\tau_a < t)} \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{I}_{B_t - B_s > 0} f_{\tau_a}(s) ds \right] / \mathbb{P}(\tau_a < t) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(B_t - B_s > 0) f_{\tau_a}(s) ds / \mathbb{P}(\tau_a < t) \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} f_{\tau_a}(s) ds / \mathbb{P}(\tau_a < t) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car le processus à partir du temps τ_a se comporte comme un mouvement brownien qui aurait initialisé au niveau a . On note que

$$\mathbb{P}(B_t > a | \tau_a < t) = \frac{\mathbb{P}(B_t > a)}{\mathbb{P}(\tau_a < t)}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_a < t) &= 2\mathbb{P}(B_t > a) \\ &= 2\mathbb{P}(B_t/\sqrt{t} > a/\sqrt{t}) \\ &= 2(1 - \phi(a/\sqrt{t})), \end{aligned}$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite. On obtient la densité en dérivant par rapport à t . □

4.3.3 Propriété de Martingale

Proposition 24. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration alors les processus définis par

1. B_t
2. $B_t^2 - t$
3. $e^{\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2}}$

sont des martingales.

Proof. Soit $s < t$.

1. On a

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s = B_s$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 + (B_t - B_s)B_s + B_s^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + \mathbb{E}(B_t - B_s)B_s + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s \end{aligned}$$

3. Comme B_t est un processus de Lévy alors le processus

$$\exp[\theta B_t - t\kappa(\theta)], \quad t \geq 0,$$

est une martingale, avec

$$\kappa(\theta) = \log(\mathbb{E}(e^{\theta B_1})) = \theta^2/2.$$

□

L'étude du temps d'arrêt τ_a permet également d'étudier la loi jointe du mouvement brownien et de son maximum courant défini par

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

Proposition 25. Pour tout $t > 0$, si $a \geq 0$ et $b \leq a$ alors

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

En particulier, on a

$$S_t \sim |B_t|.$$

Proof. On note que

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \leq b).$$

Soit le processus

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t, & \text{si } t \leq \tau_a, \\ a - (B_t - a), & \text{si } t > \tau_a. \end{cases}$$

Le processus $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est le processus réfléchi en a à partir de τ_a . Un exemple est donnée sur la Figure 4.1. La Figure 4.1 montre la bijection entre les trajectoires de B_t qui vont du niveau

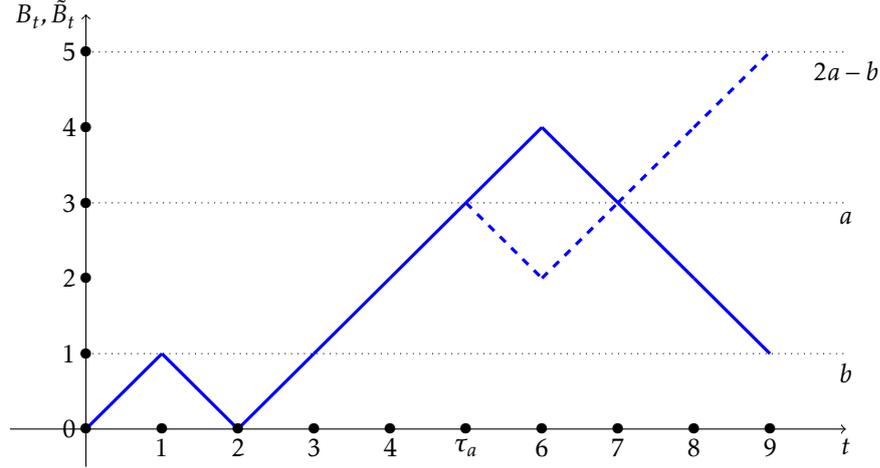


Figure 4.1: Une trajectoire du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ et de son processus réfléchi $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$.

a au niveau b et celles qui vont de a à $2a - b$ entre τ_a et t . Le processus réfléchi à partir de τ_a se comporte comme un mouvement brownien issu de a après τ_a . Les processus B_t et \tilde{B}_t ont exactement la même loi de probabilité. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \leq b) &= \mathbb{P}(\tau_a \leq t, \tilde{B}_t \geq 2a - b) \\ &= \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \geq 2a - b) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b). \end{aligned}$$

Pour la second assertion, on note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \geq a) &= \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t > a) \\ &= \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a) + \mathbb{P}(B_t > a) \\ &= \mathbb{P}(B_t > a) + \mathbb{P}(B_t > a) \\ &= 2\mathbb{P}(B_t > a) \\ &= \mathbb{P}(-B_t < a) + \mathbb{P}(B_t > a) \\ &= \mathbb{P}(|B_t| > a). \end{aligned}$$

□

4.4 Variante du mouvement Brownien et application

4.4.1 Le mouvement brownien avec dérive

Definition 39. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, le processus

$$X_t = \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0,$$

est le mouvement brownien avec dérive de paramètre de tendance μ et de variance (ou volatilité) σ .

Example 28. Le processus

$$X_t = x + ct + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \geq 0,$$

est le processus de ruine perturbé par le mouvement brownien. L'ajout du mouvement brownien permet d'ajouter des fluctuations dans le processus de collecte des primes par exemple.

4.4.2 Le mouvement brownien géométrique

Definition 40. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien avec dérive de paramètre μ et σ . Le processus

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad t \geq 0,$$

est le mouvement brownien géométrique.

Le mouvement brownien géométrique est utilisé pour modéliser le prix des actifs financier. Il est toujours positif et conduit à des rendements S_t/S_{t-1} i.i.d. de loi lognormal, ce qui signifie que les log rendements vérifient

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2).$$

4.4.3 Le pont brownien

Definition 41. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Le processus

$$X_t = B_t - tB_1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1,$$

est un pont brownien.

Proposition 26. Le pont brownien est un processus gaussien de fonction de moyenne $m(t) = 0$ et de fonction de covariance $C(s, t) = s \wedge t - ts$.

Proof. Voir TD 4 exo 2. □

On note que $X_0 = X_1 = 0$ et que $\mathbb{V}(X_t) = t - t^2$ (voir TD4 exo 2).

Example 29. Le pont brownien apparait dans le test d'adéquation à la loi uniforme de Kolmogorov-Smirnov. Supposons que nous soyons en présence d'un échantillon U_1, \dots, U_n d'observation comprise

entre 0 et 1. Nous souhaitons tester l'adéquation de la loi $\text{Unif}([0, 1])$. Nous comparons donc la fonction de répartition empirique

$$F_n(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{U_i \leq t}$$

avec la fonction de répartition de la loi uniforme donnée par

$$F(t) = t \text{ pour } 0 \leq t \leq 1.$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov considère la distance

$$D_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} |F_n(t) - t|$$

Soit le processus $X_t = \sqrt{n}[F_n(t) - t]$, $0 \leq t \leq 1$. Sous H_0 les données proviennent de la loi uniforme et donc d'après le théorème centrale limite

$$X_t \sim \text{Normal}(0, t(1-t)), \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

de plus $X_0 = 0$ et $X_1 = 0$. On peut montrer que le X_t converge effectivement vers un pont brownien en utilisant le principe d'invariance de Donsker. Le test repose alors sur la loi de $\sup_{0 \leq t \leq 1} X_t$, le maximum atteint par le pont brownien.

Bibliography

Robert P. Dobrow. *Introduction to Stochastic Processes With R*. John Wiley & Sons, Inc, mar 2016. doi: 10.1002/9781118740712.

Monroe D. Donsker. An invariance principle for certain probability limit theorems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 6:12, 1951. ISSN 0065-9266.

Jean-Francois Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer-Verlag GmbH, September 2012. ISBN 9783642318986. URL https://www.ebook.de/de/product/19950852/jean_francois_le_gall_mouvement_brownien_martingales_et_calcul_stochastique.html.

Nhan Huynh and Mike Ludkovski. Multi-output gaussian processes for multi-population longevity modelling. *Annals of Actuarial Science*, pages 1–28, may 2021. doi: 10.1017/s1748499521000142.

Monique Jeanblanc. Cours de calcul stochastique master 2if evry. lecture notes, 2006. https://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc/cours/M2_cours.pdf.

Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.

Michael Ludkovski and Howard Zail. Gaussian process models for incremental loss ratios. *Variance*, 15(1), 3 2022.

Ruhao Wu and Bo Wang. Gaussian process regression method for forecasting of mortality rates.
Neurocomputing, 316:232–239, nov 2018. doi: 10.1016/j.neucom.2018.08.001.

Chapter 5

Intégrale stochastique

L'objectif de ce chapitre est de définir des quantités du type

$$\int_0^t X_s ds, \quad (5.1)$$

$$\int_0^t f(s) dB_s, \quad (5.2)$$

et

$$\int_0^t X_s dB_s, \quad (5.3)$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus cadlag, $t \mapsto f(t)$ une fonction du temps et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien. Supposons que le mouvement Brownien et le processus X soit défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, en particulier le processus X est \mathcal{F}_t -adapté. La première intégrale (5.1) est en fait une variable aléatoire

$$\omega \in \Omega \mapsto \int_0^t X_s(\omega) ds.$$

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur intervalle bornée, c'est l'aire sous la trajectoire du processus X jusqu'au temps t . Par exemple, pour le processus de Poisson, on a

$$\int_0^t N_s ds = \sum_{k=0}^{N_t-1} k \Delta_k^T + N_t(t - T_{N_t}).$$

L'intégrale (5.2) est l'intégrale de Wiener et l'intégrale (5.3) est celle d'Ito. Le contenu de ce chapitre s'inspire des notes de cours de [Jeanblanc \[2006\]](#) et de l'ouvrage de [Dobrow \[2016\]](#).

5.1 l'intégrale de Wiener

5.1.1 L'espace $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$

Soit $T > 0$ (potentiellement $T = \infty$) un horizon de temps, on note

$$\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0, T] \mapsto \mathbb{R} ; \int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty \right\}.$$

Remark 18. Pour $T < \infty$ toutes les fonctions continues et les fonctions bornées sont dans $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$.

L'espace de fonctions $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(s)g(s)ds$$

est un espace de Hilbert, un espace vectoriel normé complet et muni d'un produit scalaire.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \geq 0}$ tel que

$$\|f - f_n\|_2 = \left(\int_0^T [f(s) - f_n(s)]^2 ds \right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

5.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]},$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = T$. L'intégrale de Wiener de f est donnée par

$$I_T(f) = \int_0^T f(s)dB_s = \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]} dB_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} dB_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Remark 19. On peut faire un parallèle avec l'intégrale de Riemann-Stieljes. Soient deux fonctions F, g continues. L'intégrale de Riemann-Stieljes notée

$$\int_0^T g(s)dF(s)$$

est approchée par la limite de sommes du type

$$\sum_{i=1}^n g(t_i^*) [F(t_{i+1}) - F(t_i)],$$

pour $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = T$ et $t_i^* \in (t_i, t_{i+1}]$. Le passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$ revient à considérer des partitions de plus en plus fines de l'intervalle $[0, T]$. L'intégrale de Riemann-Stieljes de g par rapport à F s'interprète comme une somme des valeurs prises par g sur $[0, T]$ pondérées par F . Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X continue, à valeur dans \mathbb{R} alors $f = F'$ est la densité de X et l'intégrale de Riemann-Stieljes correspond à l'espérance de $g(X)$. On a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)f(x)dx = \int g(x)dF(x),$$

on peut parler dans ce cas de moyenne pondérée. L'intégrale de Wiener est une généralisation de l'intégrale de Riemann-Stieljes avec une intégrale par rapport au mouvement brownien qui est une fonction aléatoire continue. L'intégrale de Wiener est une v.a. et on retrouve une intégrale de Riemann-Stieljes pour $\omega \in \Omega$ avec

$$I_T(f)(\omega) = \int_0^T f(s)dB_s(\omega) \approx \sum_{i=1}^n f(t_i^*)(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)).$$

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, l'intégrale de Wiener est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ gaussienne d'espérance nulle et de variance donnée par

$$\mathbb{V}[I_T(f)] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mathbb{V}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T f(s)^2 ds.$$

L'application $f \mapsto I_T(f)$ est linéaire. En effet, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions en escalier alors

$$I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g).$$

Enfin pour deux fonctions en escalier, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_T(f)I_T(g)] &= \frac{1}{2} [\mathbb{V}(I_T(f) + I_T(g)) - \mathbb{V}(I_T(f)) - \mathbb{V}(I_T(g))] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^T (f(s) + g(s))^2 ds - \int_0^T f(s)^2 ds - \int_0^T g(s)^2 ds \right] \\ &= \int_0^T f(s)g(s) ds. \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto I_T(f)$ définit une isométrie (application qui conserve les longueurs¹) de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ (fonction en escalier de carré intégrable) dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espace des v.a. de carré intégrable (telles que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$). On a

$$\langle I_T(f), I_T(g) \rangle = \langle f, g \rangle.$$

5.1.3 Cas général

Pour définir $I_T(f)$ pour $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$, on utilise l'isométrie et le lemme suivant

Lemma 5. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. $X_n \sim \text{Normal}(\mu_n, \sigma_n^2)$ convergeant vers X en norme \mathcal{L}^2 , ce qui signifie que

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^2) \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\mu_n \rightarrow \mu, \sigma_n \rightarrow \sigma, \text{ et } X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$$

Pour $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$, soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions en escalier telle que

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

Les v.a. $I_T(f_n)$ sont des v.a. gaussiennes. Comme $(f_n)_{n \geq 1}$ converge alors c'est une suite de Cauchy alors la suite $(I_T(f_n))_{n \geq 1}$ est de Cauchy comme $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet alors la suite $(I_T(f_n))_{n \geq 1}$ converge vers une v.a. dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui est aussi une v.a. gaussienne notée $I_T(f) \sim \text{Normal}\left(0, \int_0^T f^2(s) ds\right)$. L'intégrale de Wiener $f \mapsto I_T(f)$ est linéaire et définit une isométrie de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ (fonction en escalier de carré intégrable) dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Isometry>

5.1.4 L'intégrale de Wiener vue comme un processus gaussien

Soit le processus

$$M_t = I_t(f) = \int_0^t f(s)dB_s, \quad t \geq 0,$$

et $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. On note que, pour $s, t \geq 0$,

$$M_{t+s} - M_s = \int_s^{s+t} f(u)dB_u \in \sigma(B_u - B_s, u \in [s, s+t]),$$

est indépendant de $M_s \in \sigma(B_u, u \leq s)$.

Theorem 20. *Le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien \mathcal{F}_t^B -adapté, centré, de fonction de covariance donnée par*

$$C(s, t) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u)du.$$

De plus, M est à accroissement indépendant.

Proof. La v.a.

$$\begin{aligned} a_1 M_{t_1} + a_2 M_{t_2} &= a_1 \int_0^{t_1} f(s)dB_s + a_2 \int_0^{t_2} f(s)dB_s \\ &= a_1 \int_0^{t_1} f(s)dB_s + a_2 \int_0^{t_2} f(s)dB_s \\ &= a_1 \int_0^{t_1} f(s)dB_s + a_2 \int_0^{t_1} f(s)dB_s + a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(s)dB_s \\ &= (a_1 + a_2) \int_0^{t_1} f(s)dB_s + a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(s)dB_s, \end{aligned}$$

est gaussienne (somme de deux gaussiennes indépendantes) pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t_1 < t_2$.

Comme $\mathbb{E}(M_t) = 0$, alors M est un processus gaussien centrée. On calcule la fonction de covariance, soit $s \leq t$ alors

$$\begin{aligned} C(M_t, M_s) &= \mathbb{E}(M_t M_s) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s f(v)dB_v \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^s f(u)dB_u + \int_s^t f(u)dB_u \right) \int_0^s f(v)dB_v \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^s f(u)dB_u \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_s^t f(u)dB_u \int_0^s f(v)dB_v \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^s f(u)dB_u \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_s^t f(u)dB_u \right] \mathbb{E} \left[\int_0^s f(v)dB_v \right] \\ &= \int_0^s f^2(u)du, \end{aligned}$$

par symétrie on obtient $C(s, t) = \int_0^t f^2(u)du$, si $s \geq t$.

□

Proposition 27. 1. *Le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t^B -martingale.*

2. Le processus

$$X_t = M_t^2 - \int_0^t f(s)^2 ds, \quad t \geq 0,$$

est une \mathcal{F}_t^B -martingale.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(u) dB_u \int_0^s g(v) dB_v \right] = \int_0^{s \wedge t} f(u)g(u)du.$$

Proof. 1. Le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est \mathcal{F}_t^B adapté, de plus par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathbb{E}(|M_t|) \leq \mathbb{E}(M_t^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^t f(u)du \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On a, pour $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(M_t - M_s + M_s | \mathcal{F}_s^B) \\ &= \mathbb{E}(M_t - M_s) + M_s \\ &= M_s. \end{aligned}$$

2. On a, pour $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s^B) - \int_0^t f(u)^2 du \\ &= \mathbb{E}((M_t - M_s + M_s)^2 | \mathcal{F}_s^B) - \int_0^t f(u)^2 du \\ &= \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s^B) + 2\mathbb{E}((M_t - M_s)M_s | \mathcal{F}_s^B) + M_s^2 - \int_0^t f(u)^2 du \\ &= \int_s^t f(u)^2 du + 2\mathbb{E}(M_t - M_s)M_s + M_s^2 - \int_0^t f(u)^2 du \\ &= M_s^2 - \int_0^s f(u)^2 du. \end{aligned}$$

3. On a, pour $T > \max(s, t)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t f(u)du \int_0^s g(v)dv \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^T f(u)\mathbb{I}_{[0,t]}(u)dB_u \int_0^T g(v)\mathbb{I}_{[0,s]}(v)dB_v \right] \\ &= \int_0^T f(u)g(u)\mathbb{I}_{[0,t]}(u)\mathbb{I}_{[0,s]}(u)du \\ &= \int_0^{s \wedge t} f(u)g(u)du. \end{aligned}$$

□

5.2 L'intégrale d'Ito

Soit un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, càdlàg, \mathcal{F}_t^B -adapté et tel que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 ds \right) < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

On souhaite définir l'intégrale

$$\int_0^t X_s dB_s.$$

5.2.1 Cas des processus étagés

Un processus étagé est défini par

$$Y_t = \sum_{i=1}^n \theta_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

avec $(t_i)_{i \geq 1}$ une suite croissante et $\theta_i \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}^B, \mathbb{P})$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On définit alors

$$I_t(Y) = \int_0^t Y_s dB_s = \sum_{i=1}^n \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

On note que θ_i est indépendant de $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ et que

$$\mathbb{E}(\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = 0, \text{ pour } i \neq j.$$

En effet, sans perte de généralités, on peut supposer que $t_i < t_j$, dans ce cas $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est indépendant de $\theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ et

$$\mathbb{E}(\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = \mathbb{E}(\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \theta_j) \mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = 0$$

On en déduit que $\mathbb{E}(I_t(Y)) = 0$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(I_t(Y)) &= \mathbb{E}(I_t(Y)^2) \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\theta_i^2) (t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(\theta_s^2) ds = \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s^2 ds \right). \end{aligned}$$

5.2.2 Cas général

Les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ càdlàg de carré intégrable, équipé de la norme

$$\|X\|_2^2 = \mathbb{E} \left(\int X_t^2 dt \right) < \infty,$$

forment un espace de Banach² (espace vectoriel normé complet). On peut définir une suite de processus étagés $Y^n := (Y_t^n)_{t \geq 0}$ pour $n \geq 1$ vérifiant

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (X_s - Y_s^n)^2 ds \right] \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

²L'espace de Banach diffère de l'espace de Hilbert car la norme n'est pas forcément issu d'un produit scalaire.

On montre ensuite qu'il existe une v.a. $I_t(X) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t^B, \mathbb{P})$ telle que

$$\mathbb{E}(|I_t(X) - I_t(Y^n)|^2) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

on note alors

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dB_s.$$

Contrairement à l'intégrale de Wiener, l'intégrale d'Ito n'est pas une variable aléatoire gaussienne. On retrouve cependant certaines propriétés de l'intégrale de Wiener.

Proposition 28. Soient X, Y deux processus càdlàg de carré intégrable, \mathcal{F}_t^B -adapté. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $0 < u < t$. On a

1. $I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y)$
2. $\int_0^t X_s dB_s = \int_0^u X_s dB_s + \int_u^t X_s dB_s$
3. $\mathbb{E}(I_t(X)) = 0$
4. $\mathbb{V}(I_t(X)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$
5. $(I_t(X))_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

6. Le processus

$$I_t(X)^2 - \int_0^t X_s^2 ds, \text{ pour } t \geq 0$$

est une \mathcal{F}_t -martingale.

Proof. Les raisonnements se rapprochent de ceux effectués pour l'intégrale de Wiener. □

Exemple 30. Nous souhaitons calculer $\int_0^t B_s dB_s$. Soit une subdivision de $[0, t]$ définie par

$$t_j = \frac{j}{2^n} t, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n,$$

et un processus étagé égale à

$$Y_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} B_{t_{j-1}} \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}$$

1. On montre que $Y_t^n \rightarrow B_t$ au sens où

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (B_s - Y_s^n)^2 ds\right) \rightarrow 0 \text{ (convergence en moyenne quadratique intégrée)}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t (B_s - Y_s^n)^2 ds\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(B_s - \sum_{j=1}^{2^n} B_{t_{j-1}} \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(s)\right)^2 ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{2^n} (B_s - B_{t_{j-1}}) \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(s)\right)^2 ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t \sum_{j=1}^{2^n} (B_s - B_{t_j})^2 \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(s) ds\right) \text{ (termes croisé nuls.)} \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{2^n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (B_s - B_{t_{j-1}})^2 ds\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}[(B_s - B_{t_{j-1}})^2] ds \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^n} (t_j - t_{j-1})^2 \\
&= \frac{1}{2} 2^n \frac{t^2}{2^{2n}} = t^2/2^{n+1} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
I_t(Y^n) &= \int_0^t Y_t^n dB_s \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \left[\frac{1}{2} (B_{t_j} + B_{t_{j-1}}) - \frac{1}{2} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j}^2 - B_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\
&= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2
\end{aligned}$$

3. On calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(Y^n) \text{ (convergence en moyenne quadratique)}$$

On peut monter que

$$\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - t\right]^2\right\} \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Soit $Z_n = \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$, on note que

$$\mathbb{E}(Z_n) = t$$

Il faut donc montrer que $\mathbb{V}(Z_n) \rightarrow 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_n) &= \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{V}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2] \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} 2 \left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2t \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(Y^n) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Conclusion:

$$\int B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

5.3 Equation différentielle stochastique

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu X_t, \text{ et } X_0 = x_0.$$

Il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle de paramètre μ . La solution de l'équation est donnée par

$$X_t = x_0 e^{\mu t}, \quad t \geq 0.$$

L'idée est de prendre en compte l'incertitude autour du paramètre de croissance μ en ajoutant un terme d'erreur noté $(W_t)_{t \geq 0}$, avec

$$\frac{dX_t}{dt} = (\mu + \sigma W_t) X_t.$$

Le terme d'erreur est un processus stochastique appelé bruit blanc et défini de manière informelle par

$$W_t = \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \approx \frac{dB_t}{dt}.$$

Cela conduit à une *équation différentielle stochastique* (EDS)

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

La solution est un processus défini sous forme intégrale par

$$X_t = x_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s.$$

5.3.1 Processus d'Ito et lemme d'Ito

Definition 42. Soient deux fonctions $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$. On appelle processus d'Ito, un processus $X := (X_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Le processus X est solution de l'EDS

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t.$$

Exemple 31. 1. Le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Ito X avec

$$\mu(t, X_t) = 0 \text{ et } \sigma(t, X_t) = 1.$$

2. Le mouvement brownien avec drift

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

est un processus d'Ito avec

$$\mu(t, X_t) = \mu \text{ et } \sigma(t, X_t) = \sigma.$$

Sa dynamique est gouvernée par l'équation

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

3. Le mouvement Brownien géométrique

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}, \quad t \geq 0,$$

est un processus d'Ito dont la dynamique est donnée par

$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dB_t,$$

comme on le verra plus tard!

On parle aussi de diffusion, μ est le paramètre de dérive ou *drift* et σ est le paramètre de volatilité. Les processus d'Ito ne sont pas simples à étudier, on préfère généralement des processus dont la dynamique est donnée par

$$dY_t = \tilde{\mu}(t)dt + \tilde{\sigma}(t)dB_t,$$

où $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des fonctions déterministes. En effet, dans ce cas on peut calculer facilement la moyenne

$$\mathbb{E}(Y_t) = y_0 + \int \tilde{\mu}(s)ds,$$

et la variance

$$\mathbb{V}(Y_t) = \int \tilde{\sigma}(s)^2 ds.$$

Le lemme d'Ito permet d'établir la dynamique d'une transformation $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ du processus X . On choisit f de telle sorte que $df(X_t) = dY_t$.

Theorem 21. Soit $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t, X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

A noter que $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont les dérivées partielles de f par rapport à la première et deuxième variables respectivement.

La formule d'Ito est issue d'un développement de Taylor de la fonction f . On a

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots + o(dt) \text{ pour } dt \rightarrow 0.$$

En substituant x par X_t et donc dx par $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$, il vient

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} [\mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t)^2 + \dots \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \mu(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [\mu^2(t, X_t)(dt)^2 + \sigma^2(t, X_t)(dB_t)^2 + 2\mu(t, X_t)\sigma(t, X_t)dB_t dt] + \dots \end{aligned}$$

Au voisinage de $dt \rightarrow 0$, $(dt)^2$ et $dt dB_t$ converge vers 0 plus vite que $(dB_t)^2 = O(dt)$ (en moyenne quadratique). On en déduit que

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t, X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

On illustre l'utilisation du lemme d'Ito pour effectuer des petits calculs intégrales

Exemple 32. Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$. On applique la formule d'Ito sur $f(t, B_t) = B_t^2$. On note que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

L'application de la formule d'Ito renvoie

$$dB_t^2 = dt + 2B_t dB_t$$

Par intégration entre 0 et t , il vient

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t)$$

On peut également s'intéresser à des EDS célèbres

Exemple 33. 1. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Ito de dynamique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

On applique la formule d'Ito avec $f(t, X_t) = \ln(X_t)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Il vient

$$d \ln X_t = \left[0 + \frac{\mu X_t}{X_t} - \frac{\sigma^2 X_t^2}{2X_t^2} \right] dt + \frac{\sigma X_t}{X_t} dB_t$$

puis en intégrant entre 0 et t , on obtient

$$\ln X_t - \ln X_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t,$$

et finalement

$$X_t = X_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right].$$

$(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien géométrique.

2. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus d'Ito dont la dynamique est donnée par

$$dX_t = -r(X_t - \mu)dt + \sigma dB_t,$$

où r, μ et σ sont des paramètres > 0 . Ce processus implique un retour vers la valeur moyenne μ avec une vitesse de retour à la moyenne calibrée par r . En finance, ce modèle est connu sous le nom de modèle de Vasicek. Il est utilisé notamment pour modéliser des taux d'intérêt. On applique la formule d'Ito sur $f(t, X_t) = e^{rt} X_t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{rt} X_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{rt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Il vient

$$d(e^{rt}) = (re^{rt} X_t - r(X_t - \mu)e^{rt} + 0)dt + \sigma e^{rt} dB_t.$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient

$$X_t = \mu + (X_0 - \mu)e^{-rt} + \sigma \int_0^t e^{-r(t-s)} dB_s$$

En supposant que X_0 soit constant alors $X_t \sim \text{Normal}(\mu + (X_0 - \mu)e^{-rt}, \frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2rt}))$. La loi limite, pour $t \rightarrow \infty$ est une loi $\text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{2r})$

5.3.2 Schéma d'Euler-Maruyama

La forme différentielle des processus d'Ito conduit à une méthode de simulation de trajectoire. Considérons

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

Le schéma d'Euler Maruyama permet de générer une suite X_1, \dots, X_n qui approche le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ sur un intervalle $[0, T]$. Considérons la subdivision

$$t_i = \frac{iT}{N}, i = 0, \dots, N.$$

On approche dB_{t_i} par $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \text{Normal}(0, T/N)$. On définit

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i) \frac{T}{n} + \sigma(t_i, X_i) \sqrt{\frac{T}{n}} Z_i,$$

avec $Z_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$.

5.4 Changement de probabilité et théorème de Girsanov

5.4.1 Changement de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Z une v.a. positive d'espérance 1. On définit une mesure de probabilité \mathbb{Q} sur \mathcal{F} telle que

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A) = \int_A Z d\mathbb{P}.$$

Un v.a. X est \mathbb{Q} intégrable si $Z \cdot X$ est \mathbb{P} -intégrable et on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \cdot X).$$

Si on munit l'espace probabilisé d'une filtration \mathcal{F}_t et qu'on considère un processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ \mathcal{F}_t -adapté. Supposons que $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. On peut définir des lois de probabilité sur \mathcal{F}_T avec

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{I}_A).$$

Pour que \mathbb{P} et \mathbb{Q} soient des mesures de probabilité équivalentes, c'est à dire, que

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

Il est suffisant que $Z_T > 0$. Dans ce cas Z_T est la dérivée de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} . On peut définir des probabilité équivalente à \mathbb{P} restreinte à \mathcal{F}_t (c'est à dire sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$) pour $t \leq T$ avec

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(L_t \mathbb{I}_A), \forall A \in \mathcal{F}_t,$$

où $L_t = \mathbb{E}(Z_T | \mathcal{F}_t)$. Le processus L_t est en fait une martingale et si Z_t est lui-même une martingale alors $L_t = Z_t$.

5.4.2 Théorème de Girsanov

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^B, \mathbb{P})$. Le processus

$$Z_t^\theta = \exp\left(\theta B_t - t\theta^2/2\right), t \geq 0$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$ est une \mathcal{F}_t^B -martingale de moyenne 1. pour un horizon de temps $T > 0$, on définit la probabilité sur \mathcal{F}_T^B par

$$\mathbb{Q}_T^\theta(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T^\theta \mathbb{I}_A).$$

Theorem 22. *Sous la mesure \mathbb{Q}_T^θ , le processus*

$$\tilde{B}_t = B_t - \theta t, t \leq T,$$

est un mouvement brownien.

Proof. Soit le processus

$$L_t^\lambda = \exp\left(\lambda \tilde{B}_t - \lambda^2 \frac{t}{2}\right), t \geq 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $s \leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_s^B$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^\theta}(L_t^\lambda \mathbb{I}_A) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T^\theta L_t^\lambda \mathbb{I}_A) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T^\theta L_t^\lambda \mathbb{I}_A | \mathcal{F}_t^B)] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t^\theta L_t^\lambda \mathbb{I}_A] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t + \lambda B_t - \theta \lambda t - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \mathbb{I}_A\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left((\theta + \lambda)B_t - \frac{(\theta + \lambda)^2}{2}t\right) \mathbb{I}_A\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left((\theta + \lambda)B_s - \frac{(\theta + \lambda)^2}{2}s\right) \mathbb{I}_A\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_s^\lambda Z_s^\theta \mathbb{I}_A] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^\theta}[L_s^\lambda \mathbb{I}_A]
\end{aligned}$$

Cela permet de conclure que $(L_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est une martingale sous \mathbb{Q}_T^θ . cela implique que le processus \tilde{B} est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}_T^θ puisque

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\exp(\lambda \tilde{B}_t)) = \exp\left(\lambda^2 \frac{t}{2}\right), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

C'est un processus de Lévy d'exposant de Laplace $\kappa(\lambda) = \lambda^2/2$. □

Exemple 34. *Considérons le mouvement brownien géométrique dont la dynamique sous une probabilité \mathbb{P} est donnée par*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Soit $\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu}{\sigma}t$, $t \geq 0$. D'après le théorème de Girsanov, $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} définie par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T^\theta \mathbb{I}_A), \quad t \leq T, \quad A \in \mathcal{F}_T,$$

avec $Z_T^\theta = e^{\theta B_t - t\theta^2/2}$ et $\theta = -\mu/\sigma$. La dynamique sous \mathbb{Q} de X_t est donnée par

$$dX_t = \sigma X_t d\tilde{B}_t.$$

Le drift a disparu. De plus, $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, par application du lemme d'Ito sur $f(t, X_t) = \log(X_t)$, il vient

$$X_t = X_0 \exp\left(\sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right).$$

Le théorème de Girsanov permet de simplifier la dynamique de X . L'application en finance est discuté dans la [Section 5.5](#).

5.5 Application aux maths-fi: Le modèle de Black-Scholes-(Merton)

5.5.1 Le Set up

Soit une économie comprenant deux actifs l'un risqué, l'autre non. Le prix de l'actif risqué (action ou indice boursier) est un processus S défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$

dont la dynamique est donnée par

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard indépendant de S_0 la position initiale de X . Par application de la formule d'Ito sur $\ln S_t$, nous obtenons

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t], \quad t \geq 0.$$

De son côté l'actif sans risque (bond du trésor américain ou livret A) admet une dynamique déterministe avec

$$dS_t^0 = r S_t^0 dt.$$

où $r > 0$ désigne le rendement de l'actif sans risque. En supposant que $S_0^0 = 1$, il vient

$$S_t^0 = e^{rt}.$$

Un portefeuille contient à l'instant $t \geq 0$ une certaine part d'actif risqué et d'actif non-risqué. Soit $(a_t)_{t \geq 0}$ et $(b_t)_{t \geq 0}$ deux processus \mathcal{F}_t -adapté égale au nombre d'unité d'actif risqué et d'actif sans risque contenu dans le portefeuille. La valeur du portefeuille est donnée par

$$V_t = a_t S_t + b_t S_t^0, \quad t \geq 0.$$

le couple $(a_t, b_t)_{t \geq 0}$ est une stratégie d'investissement. Nous supposons que la stratégie d'investissement est *auto-finançante*, c'est à dire que les fluctuations de la valeur du portefeuille ne sont dues qu'aux fluctuations des prix des actifs. Cette hypothèse se traduit par

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dS_t^0 = (a_t \mu S_t + b_t r S_t^0) dt + a_t \sigma S_t dB_t.$$

Nous souhaitons donner un prix juste à une option européenne de maturité T et de prix d'exercice K . Selon Black, Scholes and Merton, la valeur juste est caractérisée par deux hypothèses

- L'existence d'une stratégie autofinancante permettant la répliation exacte du *pay-off* de l'option.
- Si l'option était vendu à un prix autre que le prix juste alors il y aurait une opportunité d'arbitrage, soit La possibilité d'un profit infini sans aucune prise de risque.

5.5.2 La formule de Black-Scholes

Prenons l'exemple d'un call européen pour lequel le *pay-off* à maturité est donné par

$$(S_T - K)_+.$$

L'objectif est de déterminer une stratégie autofinancante telle que

$$V_t = a_t S_t + b_t S_t^0 = u(T - t, S_t), \quad t \in [0, T],$$

où $u(\cdot, \cdot)$ est une fonction régulière (C^2) qui vérifie la condition terminale

$$V_T = u(0, S_T) = (S_T - K)_+.$$

On applique la formule d'Ito pour obtenir

$$dV_t = \left[-\frac{\partial}{\partial t} u(T-t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(T-t, S_t) \right] dt + \sigma S_t \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t) dB_t.$$

On se rappelle que du fait du caractère auto-finançant de la stratégie d'investissement alors

$$dV_t = (a_t \mu S_t + b_t r S_t^0) dt + a_t \sigma S_t dB_t.$$

De plus comme $V_t = a_t S_t + b_t S_t^0$ alors

$$b_t = \frac{V_t - a_t S_t}{S_t^0},$$

et

$$dV_t = (a_t(\mu - r)S_t + V_t r) dt + a_t \sigma S_t dB_t.$$

On en déduit que

$$a_t = \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t)(\mu - r)S_t + ru(T-t, S_t) = -\frac{\partial}{\partial t} u(T-t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(T-t, S_t)$$

Cette dernière égalité est en fait une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x)(\mu - r)x + ru(t, x) = -\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \mu x \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad (5.4)$$

vérifiée pour $x > 0$ et $t \in [0, T]$, avec la condition terminale

$$u(0, x) = (x - K)_+.$$

L'équation (5.4) admet une solution explicite (quelle chance). En effet,

$$u(t, x) = x\phi(g(t, x)) - Ke^{-rt}\phi(h(t, x)),$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$g(t, x) = \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}},$$

et

$$h(t, x) = g(t, x) - \sigma\sqrt{t}.$$

Le prix juste pour notre option européenne est donnée par

$$V_0 = u(T, S_0) = S_0\phi(g(T, S_0)) - Ke^{-rT}\phi(h(T, S_0)).$$

C'est la formule que l'on retrouve dans les papiers de [Black and Scholes \[1973\]](#) et [Merton \[1973\]](#).

La stratégie d'investissement permettant la réplcation du *pay-off* est donnée par

$$a_t = \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, S_t),$$

et

$$b_t = \frac{u(T-t, S_t) - a_t S_t}{S_t^0}.$$

Pour comprendre la signification du prix juste $q = u(T, S_0)$ en terme d'arbitrage, supposons que l'option soit vendu au prix $p > q$. On applique la stratégie suivante: à $t = 0$

- Je vends l'option au prix p ,
- J'investis q dans la stratégie auto-finançante

Je dégage un profit initial $p - q$. A maturité si $S_T > K$ alors l'acheteur exerce l'option et ma stratégie autofinancante compense la perte $S_T - K$, sinon l'acheteur n'exerce pas l'option. Je peux dégager un profit arbitrairement grand en supposant en vendant une grande quantité d'options.

5.5.3 Interprétation via la probabilité risque-neutre

Nous donnons une interprétation du juste prix du call européen dans le cadre du modèle de Black-Scholes via un changement de mesure et le théorème de Girsanov. Un prix de départ raisonnable est la valeur moyenne du flux de trésorerie future actualisé au taux de l'actif sans risque soit

$$e^{-rT} (S_T - K)_+ = e^{-rT} h(S_T)$$

Le prix juste ne correspond pas à l'espérance du flux futur actualisé en tout cas pas sous la probabilité \mathbb{P} dite historique. Il faut introduire une autre probabilité dite risque neutre \mathbb{Q} . Dans la [Section 1.3](#), cette probabilité était telle que le prix de l'actif actualisé était une martingale. Nous devons donc définir une probabilité pour laquelle le processus

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t, \quad t \geq 0,$$

est une \mathbb{Q} -martingale. Par application de la formule d'Ito, il vient

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(\mu - r)dt + \tilde{S}_t \sigma dB_t.$$

On définit $\tilde{B}_t = B_t - \frac{\mu-r}{\sigma}t$, $t \geq 0$. D'après le théorème de Girsanov $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} définie par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T^\theta \mathbb{I}_A),$$

où $Z_t^\theta = e^{\theta B_t - \theta^2 t/2}$, et $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$. Le processus $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ dont la dynamique est donnée par

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{B}_t,$$

est une \mathbb{Q} -martingale. Si on suppose qu'il existe une stratégie auto-finançante telle que

$$V_t = a_t S_t + b_t S_t^0,$$

tel que $V_T = h(S_T)$ alors la valeur du portefeuille à T actualisée au temps t est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

Soit

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t, \quad t \geq 0,$$

la valeur actualisé du portefeuille. Par application de la formule d'Ito, il vient

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -re^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t \\ &= -re^{-rt} (a_t S_t + b_t S_t^0) dt + e^{-rt} (a_t dS_t + b_t dS_t^0) \\ &= a_t (-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= a_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t , il vient

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t a_s \tilde{S}_s d\tilde{B}_s.$$

Le processus est une Q-martingale (en tant qu'intégrale d'Ito) et donc

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

On en déduit que

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

La dynamique de $(S_t)_{t \geq 0}$ est donnée par

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t,$$

et donc

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma \tilde{B}_t}.$$

On a alors

$$V_t = f(t, S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h \left(S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t)} \right) | \mathcal{F}_t \right],$$

qui est l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire Normal(0, $T-t$). On vérifie par le calcul intégrale que l'on retrouve l'expression du prix juste de l'option avec V_0 . Ces développements sont inspirés de l'ouvrage de Mikosch [1998].

5.6 Annexe: Espace Gaussien

On note que $I_T(f) = \int_0^T f(s) dB_s$ est une v.a. gaussienne mesurable par rapport à $\sigma(B_t, 0 \leq t \leq T)$ qui vérifie, pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_T(f) B_t) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T f(x) dB_s \int_0^T \mathbb{I}_{[0,t]}(s) dB_s \right] \\ &= \int_0^T f(s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} f(s) \mathbb{I}_{[0,t \wedge T]}(s) ds \\ &= \int_0^{t \wedge T} f(s) ds. \end{aligned}$$

En fait elle est unique \Rightarrow Espace Gaussien (TODO: définition et propriétés) Espace vectoriel fermé. Utile pour montrer la formule d'intégration par partie suivante.

Theorem 23. Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, dérivable et de dérivée continue alors

$$I_t(f) = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds, \forall t \geq 0.$$

Proof. Il faut vérifier que, pour $u, t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[B_u \int_0^t f(s) dB_s \right] = \mathbb{E} \left\{ B_u \left[f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \right] \right\} = \int_0^{u \wedge t} f(s) ds. \quad (5.5)$$

Le membre de droite donne

$$\mathbb{E} \left[B_u \int_0^t f(s) dB_s \right] = \int_0^{t \wedge u} f(s) ds. \text{ (déjà démontré plus haut)}$$

Le membre de gauche donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ B_u \left[f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \right] \right\} &= f(t)t \wedge u - \mathbb{E} \left[B_u \int_0^t f'(s)B_s ds \right] \\ &= f(t)t \wedge u - \int_0^t f'(s)s \wedge u ds \end{aligned}$$

Supposons que $t \leq u$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(s)s \wedge u ds &= \int_0^t f'(s)s ds \\ &= tf(t) - \int_0^t f(s) ds \end{aligned}$$

Supposons que $t > u$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(s)s \wedge u ds &= \int_0^u f'(s)s ds + u \int_u^t f'(s) ds \\ &= uf(u) - \int_0^u f(s) ds + u(f(t) - f(u)) \\ &= uf(t) - \int_0^u f(s) ds \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^t f'(s)s \wedge u ds = f(t)t \wedge u - \int_0^{t \wedge u} f(s) ds,$$

puis

$$\mathbb{E} \left\{ B_u \left[f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \right] \right\} = \int_0^{t \wedge u} f(s) ds.$$

□

Example 35. 1. On s'intéresse à $Y = \int s B_s ds$. La formule d'intégration par partie nous donne

$$\int_0^t s B_s ds = \frac{1}{2} t^2 B_t - \int_0^t \frac{1}{2} s^2 dB_s.$$

Il s'agit d'une v.a. gaussienne. On peut en calculer la moyenne et la variance. On a $\mathbb{E}(Y) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[t^4 B_t^2 - 2t^2 B_t \int_0^t s^2 dB_s + \left(\int_0^t s^2 dB_s \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[t^5 - \frac{2}{3} t^5 + \frac{t^5}{5} \right] = \frac{2t^5}{15}. \end{aligned}$$

2. Evaluation de $\int_0^t B_s^2 dB_s$ et $\int_0^t (B_s^2 - s)dB_s$. On applique la formule d'Ito avec $f(t, B_t) = B_t^3$. On note que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x.$$

L'application de la formule d'Ito renvoie

$$dB_t^3 = \frac{1}{2}6B_t dt + 3B_t^2 dB_t$$

Par intégration entre 0 et t, il vient

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^t (B_s^2 - s)dB_s &= \int_0^t B_s^2 dB_s - \int_0^t s dB_s \\ &\stackrel{IPP}{=} \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds - tB_t + \int_0^t B_s ds \\ &= \frac{1}{3}B_t^3 - tB_t. \end{aligned}$$

Bibliography

Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, may 1973. doi: 10.1086/260062.

Robert P. Dobrow. *Introduction to Stochastic Processes With R*. John Wiley & Sons, Inc, mar 2016. doi: 10.1002/9781118740712.

Monique Jeanblanc. Cours de calcul stochastique master 2if evry. lecture notes, 2006. https://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc/cours/M2_cours.pdf.

Robert C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141, 1973. doi: 10.2307/3003143.

Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View*. WORLD SCIENTIFIC, oct 1998. doi: 10.1142/3856.

Peter Tankov and Nizar Touzi. Calcul stochastique en finance. *Ecole Polytechnique Paris, Département de Mathématiques Appliquées*, page 146, 2010.