EXAMEN DE DEUXIÈME SESSION

Modélisation Charge-Sinistre– 2019-2020

Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille recto-verso manuscrite.

Question:	1	2	3	Total
Points:	0	6	6	12
Score:				

Une loi binomiale mélange beta

1. Sur une période d'exercice donnée, le nombre de sinistres est modélisé par une variable aléatoire de loi $N \sim \text{Binomial}(n, \Theta)$ où $\Theta \sim \text{Beta}(a, b)$. On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire N de loi binomiale $\text{Binomial}(n, p)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, \dots, n.$$

On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire $\Theta \sim \text{Beta}(a, b)$ admet une densité

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)} \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta),$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. La fonction beta est définie par

$$B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} \mathrm{d}u.$$

(a) Donner la loi de probabilité de N en fonction de la fonction beta.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=k) &= \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}\frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}\mathrm{d}\theta \\ &= \binom{n}{k}\frac{B(k+a,n-k+b)}{B(a,b)}\end{aligned}$$

pour $k = 0, \ldots, n$.

(b) Donner une expression de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a, b, et n.
Indications: La fonction beta s'exprime en fonction de la fonction gamma de la façon suivante

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

On rappelle que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\ \ z > 0.$$

et vérifie en particulier $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Solution: $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\mathbb{E}(N|\Theta)) = n\mathbb{E}(\Theta) = n\frac{a}{a+b}$

(c) Calculer la variance $V(N)$.

Solution:

$$\begin{aligned}V(N) &= E(V(N|\Theta)) + V(E(N|\Theta)) \\ &= nE(\Theta(1-\Theta)) + n^2V(\Theta) \\ &= n\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)} + n^2\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \\ &= \frac{nab(a+b+n)}{(a+b+1)(a+b)^2}.\end{aligned}$$

(d) Donner une méthode d'estimation pour les paramètres de N, en supposant que le paramètre n soit connu. Détailler la mise en oeuvre.

Solution: Comme on vient de calculer la moyenne et la variance, on propose d'estimer a et b via la méthode des moments. On obtient

$$\hat{a} = \frac{\bar{N}(n-\bar{N}) - S_N^2}{n(S_N^2/\bar{N}-1)+\bar{N}}, \hat{b} = \frac{(\bar{N}(n-\bar{N}) - S_N^2)(n-\bar{N})}{\bar{N}(n(S_N^2/\bar{X}-1)+\bar{N})}$$

où $\bar{N}$ et S_N^2 désigne la moyenne et la variance empirique respectivement.

(e) La loi de N appartient-elle à la famille de Panjer?

Solution: Non, il ne s'agit ni de la loi binomial, binomial négative ou Poisson.

2. Sur une période d'exercice donnée, la charge totale de sinistres est modélisée via un modèle collectif

$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k,$$

où le nombre de sinistres est une variable aléatoire de comptage de fonction de masse donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^{k-1},\ k \geqslant 1$$

et les montants de sinistres sont iid de loi exponentielle de densité de probabilité

$$f_U(x) = \frac{e^{-x/\beta}}{\beta}\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x).$$

(a) (2 points) Donner la moyenne et la variance de X.

Solution:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U) = \frac{\beta}{p}.$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(U)^2 = \frac{\beta^2}{p^2}.$$

(b) (1 point) Donner la fonction génératrice des moments de X. Vous devez détailler les calculs.

Solution:

$$M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = G_N(M_U(s)) = \frac{1}{1-\frac{\beta s}{p}}$$

(c) (2 points) Donner la loi de probabilité de X.

Solution: Il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre β/p par identification avec la fonction génératrice des moments calculer à la question précédente. Si on ne remarque pas ça, alors la densité de X s'écrit

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} f_U^{*k}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\frac{e^{-x/\beta}x^{k-1}}{\beta^k k!} = \frac{p}{\beta}e^{-xp/\beta},$$

ou f_U^{*k} est le produit de convolution de rang k de f_U avec elle-même, il s'agit donc de la densité de la loi gamma de paramètres k et β.

(d) (1 point) Supposons que nous n'observons que les charges totales de sinistres $x_1,\dots,x_t$ et les nombres de sinistres $n_1,\dots,n_t$ associées à t périodes d'exercice. Proposer une méthode d'estimation des paramètres p et β basée sur les observations $x_1,\dots,x_t$ et $n_1,\dots,n_t$. Expliquer la mise en oeuvre, donner l'expression des estimateurs si possible.

Solution: Le plus simple est de commencer par estimer p en utilisant les nombres de sinistre $n_1,\dots,n_t$, avec la méthode des moment, il vient $\widehat{p} = \left(\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} n_s\right)^{-1}$, puis estimer β via la méthode des moments avec $\widehat{\beta} = \widehat{p}\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} x_s$.

3. Les montants de sinistres sont modéliser par une loi gamma Gamma(k, m), $k, m > 0$ de densité de probabilité
$$f_{\text{Gam}}(x) = \frac{e^{-x/m}x^{k-1}}{m^k\Gamma(k)}\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x),$$
On rappelle que la fonction gamma est définie par
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}x.$$
et vérifie en particulier $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(a) (1 point) Donner l'espérance et la variance des montants de sinistres en fonction de k et m.

Solution: $\mathbb{E}(U) = km$ et $\mathbb{V}(U) = km^2$

(b) (1 point) Donner la fonction géneratrice des moments de la loi des sinistres.

Solution: $M_U(s) = \left(\frac{1}{1-ms}\right)^k$

(c) (2 points) Proposer une méthode d'estimation pour les paramètres k et m. Donner l'expression des estimateurs pour un échantillon de montant de sinistres $u_1, \ldots, u_n$.

Solution: On utilise la méthode des moments
$$\widehat{k} = \frac{\bar{U}^2}{S_U^2},\ \widehat{m} = \frac{S_U^2}{\bar{U}}$$
où $\bar{U}$ et S_U^2 désigne la moyenne et la variance empirique de l'échantillon de montants de sisnitres

(d) (2 points) Pour affiner la modéliser du montant des sinistres, on associe à la loi gamma une loi de Pareto de densité
$$f_{\text{Par}}(x) = \begin{cases} \frac{\theta^\alpha \alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > \theta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
pour modéliser les sinistres plus conséquents dans le cadre d'un modèle composite. Les conditions de régularité de la densité f du modèle composite impose de fixer la valeur de certains paramètres. Donner l'expression du paramètre m (de la loi gamma) et du paramètre de mélange r du modèle composite en fonction des autres paramètres k, αet θ, de la fonction de répartition F_{Gam} d'une loi gamma de paramètres k et m et la fonction gamma Γ.

Solution: La densité du modèle composite Gamma-Pareto est donnée par
$$f(x) = \begin{cases} r\frac{f_{\text{gam}}(x)}{F_{\text{Gam}}(\theta)} & x \leqslant \theta \\ (1-r)f_{\text{Par}}(x) & x > \theta \end{cases}$$
les conditions de régularité $f(\theta^-) = f(\theta^+)$ et $f'(\theta^-) = f'(\theta^+)$ entraine
$$\frac{r}{1-r} = \frac{f_{\text{Par}}(\theta)F_{\text{Gam}}(\theta)}{f_{\text{Gam}}(\theta)}$$

de plus $f'_{Gam}(x) = f_{\text{Gam}}(x)\left[\frac{k-1}{x} - \frac{1}{m}\right]$ et $f'_{Par}(x) = -\frac{\alpha+1}{x} f_{Par}(x)$ On en déduit que

$$m = \frac{\theta}{k+\alpha},\ r = \frac{\alpha\Gamma(k) F_{\text{Gam}}(\theta) e^{k+\alpha}(k+\alpha)^{-k}}{1 + \alpha\Gamma(k) F_{\text{Gam}}(\theta) e^{k+\alpha}(k+\alpha)^{-k}}.$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomiale	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $k=0,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k=0,1,2,\ldots$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Binomiale Négative	$\mathcal{NB}(\alpha,p)$	$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}(1-p)^\alpha p^k$	$\dfrac{\alpha p}{1-p}$	$\dfrac{\alpha p}{(1-p)^2}$	$\left(\frac{1-p}{1-pe^t}\right)^\alpha$ pour $t<-\ln(p)$
Uniforme	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponentielle	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Gamma	$\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$	$\begin{cases}\frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ pour $t<\beta$
Normale	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$

On rappelle la définition de la fonction Gamma avec

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}x^{z-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

On note que pour $z\in\mathbb{N}$ alors $\Gamma(z)=(z-1)!$.