EXAMEN FINAL

Modélisation Charge Sinistre– 2020-2021
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	6	2	2	10	20
Score:					

N'hésitez pas à utiliser le résultat des questions précédentes pour répondre à la question courante.

1. **Etude de la loi Inverse Gaussienne**

   Le montant des sinistres est distribué comme une variable aléatoire continue et positive de loi Inverse Gaussienne $U \sim \text{IG}(\mu, \tau)$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$f_U(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\tau(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right), & \text{pour } x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   La fonction de répartition de U est donnée par

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leqslant x) = \overline{\phi}\left[\sqrt{\frac{\tau}{x}}\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)\right] + e^{2\tau/\mu}\overline{\phi}\left[\sqrt{\frac{\tau}{x}}\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)\right],$$

   où $\overline{\phi}$ désigne la fonction de survie de la loi normal $\mathcal{N}(0,1)$. On pourra se référer au travail de Shuster [1] pour la preuve.

(a) (2 points) Montrer que la fonction génératrice des moments de $U \sim IG(\mu, \mu^2)$ est donnée par

$$M_U(s) = \mathbb{E}(e^{sU}) = \exp\left[\mu\left(1 - \sqrt{1-2s}\right)\right],\ s \geqslant 0.$$

Indication: Faire apparaître dans l'intégrale une densité inverse Gaussienne (dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1).

Solution: Par définition de la fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned} M_U(s) &= \int_0^{+\infty} e^{sx}\frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2x}\right]\mathrm{d}x \\ &= \exp\left[\mu\left(1-\sqrt{1-2s}\right)\right]\int_0^{+\infty}\frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left[-\frac{1-2s}{2x}\left(x-\frac{\mu}{\sqrt{1-2s}}\right)^2\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On reconnait dans l'intégrale la densité de la loi IG $\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2s}}, \mu^2\right)$

(b) (2 points) En déduire l'espérance et la variance de U.

Solution: On évalue $M_U'(0) = \mathbb{E}(U) = \mu$, $M_U''(0) = \mathbb{E}(U^2) = \mu^2 + \mu$ puis $\mathbb{V}(U) = \mu$.

(c) (1 point) Soit $U_1, \ldots, U_n$ une suite de variables aléatoire i.i.d. de loi $\mathrm{IG}(\mu, \mu^2)$. Donner, en justifiant la loi de $Z = \sum_{i=1}^n U_i$

Solution: La fonction génératrice des moments de Z est donnée par

$$M_Z(s) = \mathbb{E}(e^{sZ}) = M_U(s)^n = \exp\left\{n\mu\left(1-\sqrt{1-2s}\right)\right\},$$

et correspond à la FGM d'une loi $\mathrm{IG}(n\mu, n^2\mu^2)$.

(d) (1 point) Donner, en justifiant, la loi de $V = tU$, pour $t > 0$, où $U \sim \mathrm{IG}(\mu, \mu^2)$

Solution: La densité de V est donnée par

$$f_V(v) = \frac{\mu\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi v^3}}\exp\left[-\frac{(v-t\mu)^2}{2vt}\right]$$

et correspond à la densité d'une loi $\mathrm{IG}(t\mu, t\mu^2)$

2. (2 points) **Estimation paramétrique des paramètres de la loi inverse gaussienne**

On souhaite calibrer un modèle Inverse gaussienne $\mathrm{IG}(\mu, \mu^2)$ à notre historique de données

$$(u_1, \ldots, u_n).$$

Donner l'expression et la loi de probabilité de l'estimateur $\widehat{\mu}$ de μ par la méthode des moments (en supposant que le modèle soit bien spécifié, c'est à dire que l'échantillon $(u_1, \ldots, u_n)$ est un échantillon iid de loi $\mathrm{IG}(\mu, \mu^2)$).

Solution:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \sim \text{IG}(\mu, n\mu^2) \text{ (en exploitant les question 1.c et 1.d)}$$

3. (2 points) **Pros and cons de la distribution inverse gaussienne**
Quels sont selon vous les inconvénients/avantages de cette loi inverse Gaussienne pour modéliser des montants de sinistres?

Solution: Avantage

- Stabilité par convolution, une somme de variables aléatoires de loi inverse gaussienne suit une loi inverse gaussienne
- Estimation simple via la méthode des moments, de plus la loi de l'estimateur est connu ce qui est pratique pour la construction d'intervalle de confiance.

Inconvénient

- La loi inverse gaussienne est une distribution à queue légère, ce qui peut être génant pour la modélisation des sinistres de forte intensité.

4. **Modèle individuel avec des montants de sinistres de loi inverse gaussienne**

Soit un portefeuille de contrats contenant n polices d'assurance. On suppose qu'au cours d'une période d'exercice, l'assuré $i \in \{1, \dots, n\}$ a une probabilité $p_i \in (0, 1)$ de subir un sinistre (pas plus de un sinistre par période d'exercice). Le montant de l'indemnisation pour un sinistre est modélisé via une loi Inverse Gaussienne $\text{IG}(\mu, \mu^2)$ (même distribution indépendamment du contrat sinistré).

(a) (1 point) Spécifier l'expression de la charge totale du portefeuille X_{ind} suivant un modèle individuel pour le portefeuille considéré sur une période d'exercice (Ecrire la variable aléatoire en fonction de variables aléatoires auxiliaires et rappeler les hypothèses sous-jacentes)

Solution: Voir le cours

(b) (1 point) Calculer, en justifiant le raisonnement, la probabilité $\mathbb{P}(X_{\text{ind}} = 0)$ en fonction des p_i.

Solution:

$$\mathbb{P}(X_{\text{ind}} = 0) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

(c) (2 points) Donner l'expression de la fonction génératrice des moments de X_{ind} dans la situation décrite dans l'énoncé.

Solution: Voir le cours.

(d) (1 point) On suppose maintenant que $p_i = p$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Le modèle individuel devient alors un modèle collectif X_{col}. Donner les caractéristiques de ce modèle collectif en termes de distribution de la fréquence et du montant des sinistres.

Solution: On obtient un modèle collectif, avec

$$X_{\text{col}} = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

où $N \sim \text{Bin}(n, p)$ et $U_k \overset{i.i.d.}{\sim} \text{IG}(\mu, \mu^2)$

(e) (2 points) Donner la moyenne et la variance de X_{col}, en fonction de n, p et μ.

Solution: On applique les formules du cours

$$\mathbb{E}(X_{\text{col}}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U) = np\mu,$$

et

$$\mathbb{V}(X_{\text{col}}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(U)^2 = np\mu + np(1-p)\mu^2$$

(f) (1 point) Détailler une méthode d'approximation numérique pour évaluer la fonction de répartition de X_{col}.

Solution: Voir le cours.

(g) (2 points) Donner l'expression de la fonction de répartition de X_{col} en fonction de n, p, μ et $\overline{\phi}$ (fonction de survie de la loi normal $\mathcal{N}(0, 1)$).

Solution: La loi de proba de X_{col} s'écrit

$$\mathbb{P}_X(A) = (1-p)^n \delta_0(A) + \int_A f_X^+(x) \mathrm{d}\lambda(x)$$

avec $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et

$$\begin{aligned} f_X^+(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_{\sum_{i=1}^k U_i}(x) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f_{\sum_{i=1}^k U_i}(x) \end{aligned}$$

Comme $U_i \overset{i.i.d.}{\sim} \text{IG}(\mu, \mu^2)$ alors $\sum_{i=1}^k U_i \sim \text{IG}(k\mu, k^2\mu^2)$, puis en intégrant sur $A = [0, x]$, il vient

$$F_X(x) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left\{ \overline{\phi}\left[\sqrt{\frac{k^2\mu^2}{x}} \left(1 - \frac{x}{k\mu}\right)\right] + e^{2k\mu} \overline{\phi}\left[\sqrt{\frac{k^2\mu^2}{x}} \left(1 + \frac{x}{k\mu}\right)\right]\right\}$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2 t^2/2}$

References

[1] Jonathan Shuster. On the inverse gaussian distribution function. *Journal of the American Statistical Association*, 63(324):1514–1516, dec 1968.