EXAMEN DE DEUXIÈME SESSION

Modélisation Charge Sinistre– 2020-2021
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	4	2	2	5	6	19
Score:						

N'hésitez pas à utiliser le résultat des questions précédentes pour répondre à la question courante.

1. **Etude de la loi semi-gaussienne**

   Le montant des sinistres est distribué comme une variable aléatoire continue et positive de loi semi-gaussienne $U \sim \text{SN}(\sigma)$ définie comme $U = |X|$ (valeur absolue de X) avec X de loi normale centrée $X \sim \text{N}(0, \sigma^2)$.

   (a) (2 points) Montrer que la densité de U est donnée par

   $$f_U(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

   Solution: On observe que

   $$F_U(x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x)$$

   puis on dérive par rapport à x.

   (b) (2 points) Calculer l'espérance et la variance de U (détailler les calculs)

Solution: $\mathbb{E}(U) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, et $\mathbb{V}(U) = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$.

2. (2 points) **Estimation paramétrique de la loi semi-gaussienne**

   On souhaite calibrer un modèle semi gaussien IG(σ) à notre historique de données

   $$(u_1, \ldots, u_n).$$

   Donner l'expression d'un estimateur $\widehat{\sigma}$ de σ par la méthode des moments. Quelle est la loi de cette estimateur lorsque le nombre d'observation est grand et pourquoi?

   Solution: Méthode des moments

   $$\widehat{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}\sum_{i=1}^{n} u_i}{\sqrt{2}n}$$

   L'estimateur suit une loi normale lorsque la taille de l'échantillon grandit, par application du théorème centrale limite.

3. (2 points) **Pros and cons de la distribution semi gaussienne**
   Quels sont selon vous les inconvénients/avantages de cette loi semi Gaussienne pour modéliser des montants de sinistres?

   Solution: Avantage

   - Stabilité par convolution, une somme de variables aléatoires de loi demi gaussienne suit une loi demi gaussienne
   - Estimation simple via la méthode des moments, de plus la loi de l'estimateur est connu ce qui est pratique pour la construction d'intervalle de confiance.

   Inconvénient

   - La loi demi gaussienne est une distribution à queue légère, ce qui peut être génant pour la modélisation des sinistres de forte intensité.

4. **Modèle Poisson mélange pour la loi de la fréquence des sinistres**
   La fréquence des sinistres N suit une loi Poisson zéro-inflatée $N \sim$ ZI-Pois(p, λ) définie par

   $$N = I \cdot M,$$

   où $I \sim \text{Bin}(1, p)$ et $M \sim \text{Pois}(\lambda)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

   (a) (2 points) Donner la moyenne et la variance de N en justifiant

   Solution: La moyenne est donnée par

   $$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(I \cdot M) = \mathbb{E}(I)\mathbb{E}(M) = p \cdot \lambda$$

   et la variance par

   $$\text{Var}(N) = \text{Var}(\mathbb{E}(I{\cdot}M|I) + \mathbb{E}(\text{Var}(I{\cdot}M|I)) = \text{Var}(I)\mathbb{E}(M)^2 + \mathbb{E}(I)\,\text{Var}(M) = p(1-p)\lambda^2 + p\lambda$$

(b) (2 points) Donner la fonction génératrice des probabilités de N définie par

$$G_N(s) = \mathbb{E}(s^N),\ s \in \mathbb{R}.$$

Solution:

$$G_N(s) = 1 - p + p\exp[\lambda(s-1)]$$

(c) (1 point) Quel est l'intérêt d'un tel modèle par rapport à une loi de Poisson simple?

Solution: Plus de paramètres donc plus de flexibilité que la loi de Poisson, plus grande occurence de zéros.

5. **Modèle collectif avec des montants de sinistres de loi semi gaussienne et une fréquence de sinistre de loi Poisson mélange**

La charge totale associée à un portefeuille de contrats d'assurance non vie est modèlisé à l'aide d'un modèle collectif

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i.$$

pour lequel le nombre de sinistre suit une loi Poisson zéro-inflatée ZI-Pois(p,λ) et le montant des sinsitres par une loi semi gaussienne $U \sim \text{SN}(\sigma)$.

(a) (2 points) Calculer la moyenne et la variance de X en fonction de σ, p et λ.

Solution: On applique les formules du cours

$$\mathbb{E}(X_{\text{col}}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U) = p\lambda\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma,$$

et

$$\mathbb{V}(X_{\text{col}}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(U)^2 = p\lambda\sigma\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + (p(1-p)\lambda^2 + p\lambda)\frac{2}{\pi}\sigma^2$$

(b) (2 points) Donner l'approximation normale de la fonction de répartition de X en fonction de σ, p, λ et ϕ la fonction de répartition de la loi normale $\text{N}(0,1)$.

Solution:

$$F_X(x) \approx \phi\left(\frac{x - p\lambda\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma}{p\lambda\sigma\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + (p(1-p)\lambda^2 + p\lambda)\frac{2}{\pi}\sigma^2}\right)$$

(c) (2 points) Cette méthode d'approximation est elle adaptée? Proposer une méthode d'approximation alternative et détailler sa mise en oeuvre.

Solution: Non, car la loi de la fréquence des sinistres n'est pas Poisson, on peut utiliser l'approximation gamma ou la méthode FFT (pas l'algorithme de Panjer)

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\dfrac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$

References