RAPPELS ET BASES

TDs Modélisation Charge Sinistre – 2019-2020
Romain Gauchon

1. **Fonctions caractéristiques:**
   (a) Rappeler la définition et les principales propriétés des fonctions caractéristiques Φ_X.
   (b) Montrer que si X et Y suivent des lois de Poisson indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. **Transformée de Laplace et fonction génératrice des probabilités**
   (a) Soit X une variable aléatoire continue positive de densité f. Rappeler la définition et les principales propriétés de la transformée de Laplace L_X.
   (b) Soit N une variable aléatoire discrète. Rappeler la définition et les principales propriétés de la fonction génératrice des probabilités G_N.
   (c) Soit (X_i) une famille de va iid continues positives de densité f, indépendantes de N. Soit $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Montrer que $L_S = G_N \circ L_f$.
3. **Lien variance / variance conditionnelle**
   Soit X, Y deux va discrètes. Montrer que
   $$V(X) = -\mathbb{E}(X)^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = y_i)(V(X|Y = y_i) + \mathbb{E}(X|Y = y_i)^2).$$
4. **Modèle de Poisson composé**
   Soit (X_i) une famille de va iid de loi exponentielle de paramètre θ et de densité $f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$ pour tout $x \geqslant 0$. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ indépendante des autres variables aléatoires. Calculer la fonction de répartition de $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
5. **Décomposition de la variance**
   (a) Rappeler la formule de décomposition de la variance.
   (b) Appliquer la formule de décomposition de la variance à $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$, avec N une variable aléatoire discrète positive et $(X)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires positives i.i.d. . Quelle partie correspond à la variabilité de la fréquence des sinistres ?