Modélisation Charge Sinistre M2 Actuariat

Chapitre I: Introduction

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 16, 2021

L'objet d'étude de ce cours est un variable aléatoire X qui représente la charge totale de sinitre pour un portefeuille de contrat d'assurance non-vie durant une période d'exercice donnée.
Deux modèles sont étudiés:

- Le modèle individuel

$$X_{\text{ind}} = \sum_{i=1}^{n} I_i W_i$$

  où

  - n désigne le nombre d'assuré en portefeuille
  - $I_i \sim \text{Ber}(p_i)$ indique si l'assuré i a subit au moins un sinistre où non
  - W_i est une variable aléatoire positive égale au montant cumulé des sinistres pour l'assuré i sur la période d'exercice considérée

- Le modèle collectif

$$X_{\text{coll}} = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

  où

  - N est une variable aléatoire de comptage égale au nombre de sinistres reportés pendant la période d'exercice
  - U_i est une variable aléatoire positive correspondant à l'indemnisation au titre du sinistre i.

On adopte une vue assez simpliste du risque en négligeant par exemple l'inflation sur les sinistres au cours du temps ou en supposant que les sinistres sont réglés instantanément.

La distribution de probabilité de X nous intéresse pour

- la tarification: La prime est calculée sur la base de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$
$$\pi = (1+\eta)\mathbb{E}(X) \text{ ou } \pi = \mathbb{E}(X) + \alpha\mathbb{V}(X)$$
où $\eta, \alpha > 0$ désignent les chargements de sécurité.
- La détermination de marge de solvabilité basée sur des mesure de risque comme
  - La *Value-at-risk* définie par
  $$\text{VaR}_X(\alpha) = \inf\{x \geq 0 \ ; \ F_X(x) > \alpha\}.$$
  La VaR de niveau 99.5% est la mesure de risque de référence dans Solvabilité II.
  - La *Tail Value-at-risk* définie par
  $$\text{TVaR}_X(\alpha) = \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_X(\alpha)].$$
  La TVaR de niveau 99% est la mesure de risque de référence pour le Swiss Solvency Test.

La TVaR est aussi liée à la prime *stop-loss* en réassurance définie par

$$\text{SLP}_X(c) = \mathbb{E}[(X-c)_+]$$

où $c > 0$ est le seuil de rétention. La distribution de probabilité pour X_{ind} et X_{coll} est difficile à expliciter dans la plupart des cas et l'évaluation des quantités ci-dessus nécessite la mise au point de méthodes numériques.
Dans ce cours, nous étudierons

- Les hypothèses sous jacentes aux modèles individuels et collectifs
- Les lois de probabilités pour la fréquence des sinistres (variable N)
  - Famille de Katz: Poisson, binomial, binomial négatif. Voir Katz [1]

- Distribution *zero-inflated*, car les données montrent souvent une occurence de 0 plus importante que pour les lois classiques
- Loi de Poisson mélange, où le paramètre de la loi de Poisson est une variable aléatoire. Cela permet notamment la prise en compte d'une hétérogénéité dans la population des assurés.

- Les lois de probabilités pour les montants de sinistres
  - Les classiques: gamma, lognormale, Pareto. Distingo entre les distributions à queue légère et lourde.
  - Distributions flexible comme les lois mélanges de Erlang et Phase type
  - Les lois de *splicing*, pour modéliser séparément le ventre et la queue de la distribution. On observe souvent une occurence forte de sinistres de faible intensité et une occurence plus faible mais non négligeable de sinistre de forte intensité.
- Méthodes numériques pour les distributions composées
  - Monte Carlo approximation => Problématique pour évaluer des quantiles extrèmes
  - Normal approximation
  - Gamma approximation
  - Algorithme de Panjer, voir Panjer [3]
  - Fast Fourier Transform inversion
- Extension du modèle collectif
  - Multivarié pour modéliser conjointement le risque associé à plusieurs branche d'activité. Introduction d'une structure de dépendance.
  - Dynamique avec la modélisation de la charge de sinistres au courts du temps via un processus stochastique

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \; t \geq 0.$$

où N_t est un processus de Poisson par exemple. Il s'agit d'un premier pas vers le cours de théorie de la ruine.

Mes notes s'inspirent des notes de Stéphane Loisel [2]

L. Katz.
Unified treatment of a broad class of discrete probability distributions.
in: Classical and Contagious Discrete Distributions, Pergamon Press, Oxford, 1965.

S. Loisel.
Notes de cours: Modélisation charge sinistre.

H. H. Panjer.
Recursive evaluation of a family of compound distributions.
ASTIN Bulletin, 12(1):22–26, 1981.